Simbología matemática en LaTeX

Módulo 8: Notación para Cálculo

Erick Rafael Jaimes Cervantes
Bajo la supervisión de: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

2024

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104724
«Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa Final»

Lista de Símbolos [1]

- `\lim` : $\lim$
- `\infty` :∞
- `\sin` : $\sin$
- `\cos` : $\cos$
- `\tan` : $\tan$
- `\cot` : $\cot$
- `\sec` : $\sec$
- `\csc` : $\csc$
- `\int` : $\int$
- `\iint` : $\iint$
- `\iiint` : $\iiint$
- `\iiiint` : $\iiiint$
- `\partial` : ∂
- `\idotsint` : $\idotsint$
- `\nabla` : ∇
- `\vec{a}` : $\vec{a}$
- `\oint` : $\oint$
- `\oiint` : $\oiint$ (requiere de la biblioteca “esint”)

[1] Nota: Los símbolos deben usarse en modo matemático y algunos requieren de bibliotecas específicas. Sin embargo la mayoría se encuentran en los paquetes amsmath o amssymb.

Índice

En los módulos anteriores se han visto todas las herramientas necesarias para poder entregar cualquier trabajo en Latex. Así que, de ahora en adelante, nos centraremos en agregar simbología y notación de otras ramas de las matemáticas aprovechando los conocimientos obtenidos.

Como aclaración, para los símbolos que usen las bibliotecas 'amssymb' y 'amsmath' no se mencionará el uso de la paquetería pues se recomienda tenerlas por defecto en todo proyecto.

1. Precálculo

1.1. Funciones

El principal objeto de estudio en el cálculo son las **funciones** por lo que comenzaremos con algunas notaciones comunes de ellas.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no podemos tomar el valor $x = 0$ por lo que es importante especificar el dominio de esta función. Para ello podemos escribir:

$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{x} \end{array}$$

El cual su código es:

```
$$\begin{array}{c}
    f:\mathds{R}\backslash\{ 0\} \longrightarrow \mathds{R}  \\
    x \longrightarrow\frac{1}{x}
\end{array}$$
```

Es importante observar que se ha introducido un nuevo tipo de fuente el cual es muy frecuente en los campos. Por ejemplo, los símbolos $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son la notación para los números complejos, reales y racionales respectivamente. Para poder llamarlo, es necesario usar la paquetería 'dsfont' y el comando `\mathds{}` donde entre llaves va la letra que requerimos.

Además de un símbolo nuevo $\longrightarrow$ que a diferencia del que se usó, en algún módulo pasado, este es más largo y su comando es `\longrightarrow`. También es posible para el lado contrario o la flecha bidireccional $\longleftarrow$, $\longleftrightarrow$ cuyos comandos son `\longleftarrow` y `\longleftrightarrow` respectivamente.

También existe la siguiente notación para la regla de correspondencia:

$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Cuyo código es:

```
$$\begin{array}{c}
    f:\mathds{R}\backslash\{ 0\} \longrightarrow \mathds{R}  \\
    f(x) = \frac{1}{x}
\end{array}$$
```

1.2. Funciones definidas por partes

También es posible agregar notación para funciones definidas por trozos usando comandos ya conocidos, por ejemplo:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{rr} x^{2} & x\leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & x > 0 \end{array} \right.$$

Cuyo código es:

```
$$f(x) = \left\{\begin{array}{rr}
    x^{2} & x\leq 0 \\
     \frac{1}{x^2} &  x > 0
\end{array} \right.$$
```

Donde solo hemos usado herramientas ya conocidas.

Ahora vamos a introducir un nuevo comando para poder expresar un **límite**. Para ello usaremos `\lim_{}` donde entre llaves pondremos a donde tiende la variable que usemos, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos (x)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

cuyo código es:

```
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos (x)}{x-\frac{\pi}{2}}$$
```

Notemos que para el coseno usamos el comando `\cos` el cual le da una tipografía tipo texto. También podemos usarlo para otras funciones trigonométricas como sin, tan, sec, csc y cot utilizando `\sin`, `\tan`, `sec`, `\csc` y `\cot`. Para sus funciones inversas solo es necesario agregar 'arc' al inicio del comando, por ejemplo, `\arcsin` nos daría arcsin. Y análogamente para identidades hiperbólicas, agregamos una 'h' al final del comando, por ejemplo, `\coth` nos daría coth.

Otro símbolo importante en límites es el símbolo del infinito que se llama lemniscata. Para poder llamarlo usamos el comando `\infty` que nos da como resultado ∞.

Un ejemplo de su uso:

$$\lim_{x \rightarrow - \infty} \frac{1}{x}=0$$

Cuyo código es:

```
$$\lim_{x \rightarrow - \infty} \frac{1}{x}=0$$
```

Para los límites laterales solo basta usar un superíndices, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow x_{0}^{+}}f(x)=\lim_{x \rightarrow x_{0}^{-}}f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_{0}}f(x)=L$$

Cuyo código es:

```
$$\lim_{x \rightarrow x_{0}^{+}}f(x)=\lim_{x \rightarrow x_{0}^{-}}f(x) = L
\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_{0}}f(x)=L$$
```

2. Cálculo en una Variable

Ahora vamos a ver la notación para el cálculo para funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1. Derivada

La derivada tiene distintas notaciones, donde la más común es la de Leibniz:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuyo código es:

```
$$\frac{df(x)}{dx} =\lim_{x \rightarrow x_{0}}\frac{f(x)-f(x_{0})}{x-x_{0}}$$
```

Notemos que no se ha agregado ningún comando nuevo.

Existen otras notaciones que no son muy frecuentes, por ejemplo, la notación de Lagrange $f'(x)$ que se escribe `f'(x)`, la notación de Euler $D_x f$ o la notación de Newton $\dot{f}(x)$ que se escribe `\dot{f}(x)`.

Para las derivadas de orden superior lo veremos con un ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(t) = e^{\omega t}$

su primera derivada es:

$$\frac{df}{dx} = \omega e^{\omega t}$$

cuyo código es:

```
$$\frac{df}{dx}= \omega e^{\omega t}$$
```

Y su segunda derivada es:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \omega^2 e^{\omega t}$$

cuyo código es:

```
$$\frac{d^{2}f}{dx^{2}}= \omega^{2} e^{\omega t}$$
```

entonces para la n-ésima derivada:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \omega^n e^{\omega t}$$

cuyo código es:

```
$$\frac{d^{n}f}{dx^{n}}= \omega^{n} e^{\omega t}$$
```

2.2. Integral

El otro símbolo importante del cálculo es el de la integral, que se se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F(a)$$

cuyo código es:

```
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F(a)$$
```

El comando `\int` nos dará el signo de integración. Se puede observar en el ejemplo anterior es que el uso de índices y subíndices nos dan los límites de integración.

Si queremos escribir una integral indefinida basta con omitir los límites:

$$\int dx=x+c \qquad \text{con c una constante.}$$

cuyo código es:

```
$$\int dx=x+c \qquad \text{con c una constante.}$$
```

Notemos que no hay una gran cantidad de símbolos en una dimensión, sin embargo, al generalizar aparecerán otros operadores que veremos a continuación.

3. Cálculo multivariable

3.1. Derivadas parciales

Las derivadas parciales se usan en funciones escalares, es decir, funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En ellas se debe hacer mención de la variable sobre la que se esta derivando y las demás se tomarán como constantes.

El símbolo que usaremos es ∂ que es llamado por el comando `\partial`. Y la operación se puede denotar de dos maneras.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = x^3 + 3y^2$

La derivada parcial respecto a x es:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^{2}+3y^{2}$$

cuyo código es:

```
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^{2}+3y^{2}$$
```

La derivada respecto a y es :

$$\partial_{y}f(x,y) = x^{3} + 6y$$

cuyo código es:

```
$$\partial_{y}f(x,y) = x^{3} + 6y$$
```

La primera notación es más común, sin embargo, en el ámbito de las ecuaciones diferenciales es más probable encontrarse con la segunda.

Para las derivadas parciales de orden superior de orden superior la notación es análoga a lo visto en las derivadas de una dimensión, sin embargo, en este caso puede haber derivadas mixtas, es decir, derivar una vez respecto a una variable y la segunda respecto a otra. Tomando el ejemplo anterior, ahora vamos a derivar la primera respecto a y y la segunda respecto a x respetando las dos notaciones para conocer como se escribe cada una:

La derivada respecto a y de la primera:

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial y \partial x} = 3x^{2} +6y$$

cuyo código es:

```
$$\frac{\partial^{2}f}{\partial y \partial x} = 3x^{2} +6y$$
```

Ahora, la derivada respecto a x de la segunda:

$$\partial^{2}_{xy}f = 3x^{2} +6y$$

cuyo código es:

```
$$\partial^{2}_{xy}f = 3x^{2} +6y$$
```

3.2. Integrales múltiples

Para poder escribir integrales múltiples tenemos dos opciones, la primera usando varias veces el comando `\int` y la segunda es con una variante de este donde agregaremos una ï”por cada símbolo integral que queremos agregar. Cada una de estas formas tienes sus ventajas, por ejemplo:

- Con el comando `\int` podemos agregar la cantidad de integrales que queramos a comparación de su variante que está limitado a cuatro símbolos `\iiiint` $\iiiint$ (aún así no hay tanto problema con ello pues es raro encontrarse una integral quíntuple en adelante).
- Otra ventaja del comando `\int` es que podemos establecer los límites de integración, por ejemplo:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{R} r^{2}\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

cuyo código es:

```
$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{R}r^{2}
\sin{\theta} dr d\theta d\varphi$$
```

Y para el comando `\iiint` no es posible hacer lo anterior:

$$\iiint_{V}dv$$

cuyo código es:

```
$$\iiint_{V}dv$$
```

- Para el segundo tipo de integrales (donde no están explícitos los límites de integración) es conveniente usar la variante, pues si lo hacemos con el comando `\int` se verá menos estético, por ejemplo:

$$\int\int\int_{V}dv$$

cuyo código es:

```
$$\int\int\int_{V}dv$$
```

Otra manera de mostrar integrales múltiples es usando el comando `\idotsint` que nos daría el siguiente resultado:

$$\idotsint_{V}dv$$

cuyo código es:

```
$$\idotsint_{V}dv$$
```

3.3. Operador Nabla

Otro símbolo muy importante es el del operador vectorial nabla ∇ que es llamado por el comando `\nabla`. Por simplicidad y puesto que el objetivo del curso es aprender a usar LaTeX se usarán coordenadas cartesiana en 3D. Dicho lo anterior, el operador nabla ∇ está dado por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Cuyo código es:

```
$$\nabla  = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y},
\frac{\partial}{\partial x}  \right)$$
```

Este operador se puede aplicar de distintas maneras que veremos a continuación.

3.3.1. Gradiente

El gradiente es un vector resultante de usar el operador nabla a un campo escalar. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar, el gradiente está dado por:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

Ahora vamos a ver un ejemplo de como se usa:
Sea $\varphi(x, y, z) = x^2 + yz$ entonces el gradiente es:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = (2x, z, y)$$

Cuyo código es:

```
$$\nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x},
\frac{\partial \varphi}{\partial y},
\frac{\partial \varphi}{\partial x}  \right) = (2x,z,y) $$
```

3.3.2. Divergencia

La divergencia es el campo escalar resultante de operar el operador nabla con un campo vectorial por medio del producto escalar de la siguiente manera:
Sea $\vec{F}$ un campo vectorial tal que $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, la divergencia está dada por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

El código lo veremos en el ejemplo, sin embargo, es importante notar que aparece un nuevo símbolo, el cual es la flecha encima de la letra, lo cual denota que es un vector. Esta es llamada por el comando `\vec{}` donde entre llaves va la variable. Por ejemplo, $\vec{a}$ se escribe `\vec{a}`.

Después de ese pequeño paréntesis para agregar notación, ahora sí vamos a ver un ejemplo para la divergencia:
Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y, xz, xy + z)$, su divergencia está dada por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial (y)}{\partial x} + \frac{\partial (xz)}{\partial y} + \frac{\partial (xy + z)}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Cuyo código es:

```
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_{x}}{\partial x}
+ \frac{\partial F_{y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{z}}{\partial z}
= \frac{\partial (y)}{\partial x} + \frac{\partial (xz)}{\partial y}
+ \frac{\partial (xy+z)}{\partial z}= 0+0+1 = 1$$
```

3.3.3. Laplaciano

El laplaciano es el operador resultante de aplicar el producto interno al operador nabla consigo mismo. Este se aplica a campos escalares de la siguiente manera:

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Notemos que existen dos notaciones para el laplaciano: ∇^2 que es más usada por los físicos y Δ que es más usada por los matemáticos.

Ahora vamos a ver un ejemplo de su uso:

Sea $\varphi(x, y, z) = x + y^2 + z^3$, el laplaciano está dado por:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (x+y^2+z^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x+y^2+z^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x+y^2+z^3)}{\partial z^2} = 0+2+6z = 6z+2$$

Cuyo código es:

```
$$\nabla^{2}\varphi = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}}
+ \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}}
+ \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial z^{2}}
= \frac{\partial^{2} (x+y^{2}+z^{3})}{\partial x^{2}}
+ \frac{\partial^{2} (x+y^{2}+z^{3})}{\partial y^{2}}
+ \frac{\partial^{2} (x+y^{2}+z^{3})}{\partial z^{2}} = 0+2+6z = 6z+2 $$
```

3.3.4. Rotacional

Finalmente, el rotacional es el vector obtenido al aplicar el operador nabla a un campo vectorial por medio del producto cruz. Este puede ser calculado por medio de un determinante de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{x} & F_{y} & F_{z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_{z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{y}}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial F_{x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{z}}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_{y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{x}}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Cuyo código es:

```
$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix}
    \hat{x}  & \hat{y}  & \hat{z}  \\
    \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}
    & \frac{\partial}{\partial z} \\
    F_{x} & F_{y}  & F_{z}
\end{vmatrix}
=\left( \frac{\partial F_{z}}{\partial y} -
\frac{\partial F_{y}}{\partial z} \right) \hat{x}
+ \left( \frac{\partial F_{x}}{\partial z} -
\frac{\partial F_{z}}{\partial x} \right) \hat{y}
+ \left( \frac{\partial F_{y}}{\partial x} -
\frac{\partial F_{x}}{\partial y} \right) \hat{z} $$
```

3.4. Integral de línea cerrada

Una integral de linea es una integral que es evaluada sobre una curva y se denota de la siguiente manera:

$$\int_C F\ ds$$

Sin embargo, cuando la curva es cerrada tenemos un símbolo nuevo $\oint$ que es llamado por el comando `\oint`.

Entonces, la integral de línea cerrada es denotada por:

$$\oint_C F\ ds$$

Cuyo código es:

```
$$\oint_{C}F \ ds$$
```

3.5. Integral sobre superficie cerrada

Finalmente, el último símbolo es la integral sobre una superficie que es análoga a la integral de línea pero para integrales dobles. Se denota de la siguiente manera:

$$\iint_S F\ ds$$

Cuando tenemos una superficie cerrada necesitamos un nuevo símbolo para el cual es necesario llamar una nueva paquetería llamada "esint" y el símbolo $\oiint$ es llamado por el comando `\oiint`. Entonces, la integral sobre una superficie cerrada está dada por:

$$\oiint_S F\ ds$$

Cuyo código es:

```
$$\oiint_{S} F \ ds $$
```

4. Notas finales

Con lo visto hasta este módulo tenemos la simbología y herramientas necesarias para realizar la mayoría de trabajos y tareas de las materias de la carrera de matemáticas, desde trabajos de álgebra superior hasta ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, variable compleja, análisis matemático, etc. Algunas ramas de las matemáticas requieren de símbolos más específicos, sin embargo es probable que sean parte de algún repositorio y que sea rápido encontrarlo en la web.