Simbología matemática en LaTeX

Módulo 5: Álgebra superior (ecuaciones)

Erick Rafael Jaimes Cervantes

Bajo la supervisión de: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

2024

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104724
«Hacia una modalidad a distancia de la Licenciatura en Matemáticas de la FC-UNAM - Etapa Final»

Lista de Símbolos [1]

- `\emptyset` : $\emptyset$
- `\cup` : $\cup$
- `\cap` : $\cap$
- `\triangle` : $\triangle$
- `\times` : $\times$
- `\neq` : $\neq$
- `\leq` : $\leq$
- `\geq` : $\geq$
- `\bigcup` : $\bigcup$
- `\bigcap` : $\bigcap$
- `\ldots` : $\ldots$
- `\pm` : $\pm$
- `\sqrt{a+b}` : $\sqrt{a+b}$ (dentro de las llave van los términos dentro de la raíz)
- `\frac{a}{b}` : $\frac{a}{b}$
- `\sum` : $\sum$
- `\prod` : $\prod$
- `\cdots` : $\cdots$
- `\infty` : ∞
- `\cdot` : $\cdot$
- `\equiv` : $\equiv$
- `\mod{n}` : $\mod{n}$
- `\pmod{n}` : $\pmod{n}$

[1] Nota: Los símbolos deben usarse en modo matemático y algunos requieren de bibliotecas específicas. Sin embargo la mayoría se encuentran en los paquetes amsmath o amssymb.

Expresiones matemáticas en Latex

En el módulo tres se vieron tres maneras de iniciar el modo matemático el cual se usa para escribir expresiones matemáticas. En este módulo veremos un par de herramientas que podemos usar en el modo matemático.

Texto dentro de ecuaciones

Si tratamos de escribir algún texto dentro del modo matemático, nos tomará los caracteres en un formato adecuado para expresiones matemáticas además de que no considera los espacios, por ejemplo:

```
$Esto es un texto dentro del modo matematico$
```

Nos daría como resultado:

$$Esto es un texto dentro del modo matematico$$

Entonces para poder agregar textos dentro necesitamos la biblioteca 'amsmath' y usar el comando `\text{}` de la siguiente manera:

```
$$\text{Esto es un texto dentro del modo matemático}$$
```

Y ahora obtenemos:

$$\text{Esto es un texto dentro del modo matemático}$$

Sin embargo, sigue sin respetar los espacios fuera del comando texto:

```
La disyunción entre P y Q son verdaderas si $P \text{o} Q$ es verdadera.
```

Que da como resultado:

La disyunción entre P y Q son verdaderas si $P \text{o} Q$ es verdadera.

Por lo que si queremos dejar un espacio dentro del modo matemático tenemos que usar el comando `\quad` para dejar un espacio y `\qquad` para el doble de espacio. Así que:

```
La disyunción entre P y Q son verdaderas si $P \quad \text{o} \quad Q$ es verdadera.
```

Y obtenemos:

La disyunción entre P y Q son verdaderas si $P \quad \text{o} \quad Q$ es verdadera.

Referenciar ecuaciones

Para etiquetar una ecuación necesitamos usar el entorno 'equation' y dentro de él usar el comando `\label{}` de la siguiente manera:

```
\begin{equation}
    \label{eq: pitagoras}
    a^{2} + b^{2} = c^{2}
\end{equation}
```

Donde obtendremos:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Es recomendable identificar las etiquetas de las ecuaciones similar a los visto en las etiquetas de las tablas del módulo 4. En este caso podemos identificarlas con un 'eq: nombre_para_identificar'.

Para poder referenciar la ecuación, usamos el comando `\eqref{}` de la siguiente manera:

```
Para un triangulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c.
La ecuación \eqref{eq: pitagoras} representa el teorema de Pitágoras.
```

Y se obtiene:

Para un triangulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c. La ecuación (1) representa el teorema de Pitágoras.

Fracciones, raíces cuadradas y ajustar tamaño de signos de puntuación dobles

Para agregar fracciones usamos el comando `\frac{}{}` donde en las primeras llaves va el numerador y en las segundas el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

en código latex:

```
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$
```

Para la raíz cuadrada usamos el comando `\sqrt{}` donde entre llaves van los términos de la raíz. Por ejemplo:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{2^{-1}}$$

```
$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} =x^{2^{-1}}$$
```

Para raíces de otros grados usamos `\sqrt[]{}` donde entre corchetes va el grado:

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Ahora consideremos la expresión:

$$f(\frac{a}{b}) = (\frac{a}{b})^{2}$$

```
$$ f(\frac{a}{b}) = (\frac{a}{b})^{2}$$
```

notemos que los paréntesis se ven muy pequeños y para poder arreglarlos necesitamos usar los comandos `\left( \right)`, entonces:

$$f\left(\frac{a}{b} \right) = \left(\frac{a}{b} \right)^{2}$$

```
$$ f\left(\frac{a}{b} \right) = \left(\frac{a}{b} \right)^{2}$$
```

Estos comandos también funcionan con llaves, corchetes y con las plecas.

Una consideración importante es que estos comandos siempre deben ir acompañados, en caso de solo usar left, o right, nos mandará error. Si solo se quiere usar para una, entonces, a la otra se le agrega un punto en lugar del símbolo. Por ejemplo:

$$f[x] = \left\{ f(x)\left| \right. x \in A \right\}$$

```
$$f[x] = \left\{ f(x)\left| \right. x \in A \right\}$$
```

Simbología en Álgebra superior

Existe un conjunto especial que no contiene elementos que es llamado 'El conjunto vacío' y es denotado por el símbolo $\emptyset$. Para poder usarlo usamos el comando en modo matemático `\emptyset`.

También tenemos al 'conjunto universal' que contiene a todos los elementos dentro del contexto que estamos trabajando y usualmente es denotado por la letra U.

Ahora definimos el complemento de un conjunto como:

Sea U el conjunto universal y $A \subseteq U$ un conjunto. Definimos el conjunto universal como:

$$A^{c} = \{ x \in U : x \notin A \}$$

```
$$A^{c} = \{ x \in U : x \notin A \}$$
```

Y notemos que se han usado solo comandos conocidos.

Otro conjunto importante es **el conjunto potencia de** A que es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de A. Este es denotado por el símbolo $\mathscr{P}(A)$. Para poder llamarlo es necesario usar la paquetería 'mathrsfs' que añade una nueva tipografía que se llama con el comando `\mathscr{P}`. Un ejemplo del conjunto potencia:

Sea $A = \{a, b\}$, entonces el conjunto potencia está dado por:

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

Operaciones entre conjuntos

Existen cuatro operaciones básicas entre conjuntos, unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica:

- La unión entre dos conjuntos se denota por el símbolo $\cup$ que es llamado por el comando `\cup`.
- La intersección se denota por el símbolo $\cap$ que es llamado por el comando `\cap`.
- La diferencia se denota por el símbolo $\backslash$ que es llamado por un comando ya conocido `\backslash`.
- La diferencia simétrica se denota por el símbolo $\triangle$ que es llamado por el comando `\triangle`.

y veamos sus definiciones en notación simbólica:
Sea U el conjunto universal y $A, B \subseteq U$ conjuntos.
Unión:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

escrito como:

```
$$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \vee x \in B \}$$
```

Intersección:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

escrito como:

```
$$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \wedge x \in B \}$$
```

Diferencia:

$$A \backslash B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

escrito como:

```
$$A \backslash B = \{ x \in U : x \in A \wedge x \notin B \}$$
```

Diferencia:

$$A \triangle B = \{x \in U : x \in (A \backslash B) \vee x \in (B \backslash A)\}$$

escrito como:

```
$$A \triangle B = \{ x \in U : x \in (A\backslash B) \vee x \in (B\backslash A) \}$$
```

Ahora veamos otros símbolos muy usados en teoría de conjuntos.

Uno de ellos es **el producto cartesiano** denotado por el símbolo $\times$ que se llama con el comando `\times`, entonces:

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Escrito como:

```
$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \} $$
```

La cardinalidad de un conjunto A es la cantidad de elementos que contiene y es denotado por $\mathrm{card}(A)$, $\#(A)$ ó $|A|$.

Se puede demostrar que si A es un conjunto:

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

que se obtiene a partir de los recursos ya conocidos:

```
$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$
```

Finalmente hablaremos de la unión e intersección para familias de conjuntos:

Sea I un conjunto de indices y $\{A_i\}_{i \in I}$. La unión se denota por:

$$\bigcup_{i \in I}A_{i}$$

```
$$\bigcup_{i \in I}A_{i} $$
```

Y la intersección por:

$$\bigcap_{i \in I}A_{i}$$

```
$$\bigcap_{i \in I}A_{i} $$
```

es importante notar que ahora se usaron los comandos `\bigcup` y `\bigcap` pues estos tienen un tamaño mayor y permiten que se vean mejor los índices y subíndices.

Si I es un conjunto de números naturales también podemos escribir las operaciones anteriores como:

Unión:

$$\bigcup_{i =1}^{n}A_{i} = A_{1} \cup A_{2} \cup \ldots \cup A_{n}$$

```
$$\bigcup_{i =1}^{n}A_{i} = A_{1} \cup A_{2} \cup  \ldots \cup A_{n}  $$
```

Intersección:

$$\bigcap_{i =1}^{n}A_{i} = A_{1} \cap A_{2} \cap \ldots \cap A_{n}$$

```
$$\bigcap_{i =1}^{n}A_{i} = A_{1} \cap A_{2} \cap  \ldots \cap A_{n}  $$
```

Expresiones algebraicas

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Su signo =' no requiere de ningún comando en especial y puede usarse tanto en modo matemático como en modo texto.

En cambio, cuando dos expresiones no son iguales se usa el símbolo '$\neq$' que se usa con el comando `\neq`.

Si estamos trabajando en un campo ordenado, también podemos usar desigualdades para relacionar elementos:

- $a < b$: se lee 'a es menor que b' y no se requiere de un comando especial.
- $a > b$: se lee 'a es mayor que b' y no se requiere de un comando especial.
- $a \leq b$: se lee 'a es menor o igual que b' y se usa el comando `\leq` para llamarlo.
- $a \geq b$: se lee 'a es mayor o igual que b' y se usa el comando `\geq` para llamarlo.

Para poner en practica algunas cosas aprendidas en este módulo vamos a deducir las soluciones a la ecuación general de $2^{\underline{do}}$ grado:

Sea $A \neq 0$. Consideramos

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{2}$$

Como $A \neq 0$ entoces podemos dividir la ecuación (2) entre A:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

Ahora sumamos de ambos lados el término $\left(\frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2}$ y usamos la propiedad conmutativa de la suma para utilizar el método de completar cuadrados de los primeros dos términos:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$$

Entonces factorizamos y restamos el término constante de ambos lados para obtener:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

Ahora buscamos que la suma de la izquierda tenga el mismo denominador por lo que el término $\frac{C}{A}$ lo multiplicamos por $1 = \frac{4A}{4A}$:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{4AC}{4A^2} = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$$

Por lo que:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$$

Y sacamos raíz cuadrada de ambos lados:

$$\sqrt{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{B^{2}-4AC}{(2A)^{2}}}$$

Tenemos dos soluciones una con signo positivo y otra con negativo por lo que:

$$x+\frac{B}{2A}=\pm\frac{\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

restamos el término constante del lado izquierdo a ambas partes y agrupamos las fracciones:

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

$\therefore$ Las soluciones a la ecuación (2) son:

$$x_{+}=\frac{-B+\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad x_{-}=\frac{-B-\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

Notemos que ha aparecido un nuevo símbolo de más/menos '$\pm$' se llama con el comando `\pm`.

Antes de continuar con la siguiente parte, vamos a mostrar como hacer sumas y productos de más de dos términos de manera compacta.

Para la suma, usando de ejemplo una n términos, se usa el comando `\sum` de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i}=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}$$

que se escribe en latex:

```
$$\sum_{i=1}^{n}a_{i}=a_{1}+a_{2}+ \cdots + a_{n}$$
```

donde también agregamos el símbolo de puntos centrados con el comando `\cdots`.

También si la suma es infinita podemos usar:

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{i}=a_{1}+a_{2}+\cdots$$

que se escribe en latex:

```
$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{i}=a_{1}+a_{2}+ \cdots $$
```

donde llamamos al símbolo del infinito '∞' con el comando `\infty`.

Y para el producto de n términos usamos el comando `\prod`:

$$\prod_{i=1}^{n}a_{i}=a_{1}\cdot a_{2}\cdot \ \ldots \ \cdot a_{n}$$

que se escribe en latex:

```
$$\prod_{i=1}^{n}a_{i}=a_{1}\cdot a_{2} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{n}$$
```

donde también se usa el símbolo de un solo puntos centrado '$\cdot$' que se llama con el comando `\cdot`.

Divisibilidad

Finalmente veremos la simbología en la aritmética modular.

Sea $A \neq 0$. Decimos que 'A divide a B' si existe un número entero tal que:

$$B = kA$$

y se denota por:

$$A|B$$

En este caso solo usamos una pleca |, sin embargo, el símbolo de divisibilidad suele ser más largo, por lo que podemos usar el comando `\big` para hacerlo más grande, entonces:

$$A\big|B$$

que en código se ve:

```
$$A\big|B$$
```

este comando tiene variantes que van aumentando el tamaño: `\bigg`, `Big` y `\Bigg`.

Ahora la relación principal de la aritmética modular es la congruencia:

Sea $n \neq 0$, decimos que a es congruente con b módulo n sii:

$$n\big|a-b$$

y se denota por:

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{o} \quad a \equiv b \mod{n}$$

Donde se agregaron el símbolos de congruencia, o también llamado equivalencia, '≡' que se llama con el comando `\equiv` y los comandos de módulos que se llaman con `\pmod{}` y `mod{}` respectivamente.

El código de la parte de la ecuación general de segundo grado:

```
    Sea $A \neq 0$. Consideramos
\begin{equation} \label{eq: 2dogradogeneral}
Ax^{2} + Bx + C = 0
\end{equation}
Como $A\ne 0$ entoces podemos dividir la ecuación \eqref{eq: 2dogradogeneral} entre $A$:

$$x^{2} + \frac{B}{A}x +\frac{C}{A} = 0$$

Ahora sumamos de ambos lados el término $\left( \frac{B}{2A} \right)^{2} =
\frac{B^{2}}{4A^{2}}$ y usamos la propiedad conmutativa de la suma para utilizar el método
de completar cuadrados de los primeros dos términos:

$$x^{2} + \frac{B}{A}x + \left( \frac{B}{2A} \right)^{2} +\frac{C}{A}
= \left( \frac{B}{2A} \right)^{2}$$
Entonces factorizamos y restamos el término constante de ambos lados para obtener:

$$\left( x + \frac{B}{2A} \right)^{2} = \frac{B^{2}}{4A^{2}} - \frac{C}{A}$$

Ahora buscamos que la suma de la izquierda tenga el mismo denominador por lo que el término
$\frac{C}{A}$ lo multiplicamos por $1=\frac{4A}{4A}$:

$$\left( x + \frac{B}{2A} \right)^{2} = \frac{B^{2}}{4A^{2}} - \frac{4AC}{4A^{2}}
=\frac{B^{2}-4AC}{(2A)^{2}}$$

Por lo que:

$$\left( x + \frac{B}{2A} \right)^{2} =\frac{B^{2}-4AC}{(2A)^{2}}$$

Y sacamos raíz cuadrada de ambos lados:

$$\sqrt{\left( x + \frac{B}{2A} \right)^{2} }= \sqrt{\frac{B^{2}-4AC}{(2A)^{2}}}$$

Tenemos dos soluciones una con signo positivo y otra con negativo por lo que:

$$ x + \frac{B}{2A}= \pm \frac{\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

restamos el término constante del lado izquierdo a ambas partes y agrupamos las fracciones:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

$\therefore$ Las soluciones a la ecuación \eqref{eq: 2dogradogeneral} son:

$$x_{+} = \frac{-B  + \sqrt{B^{2}-4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad
x_{-} =\frac{-B - \sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$
```