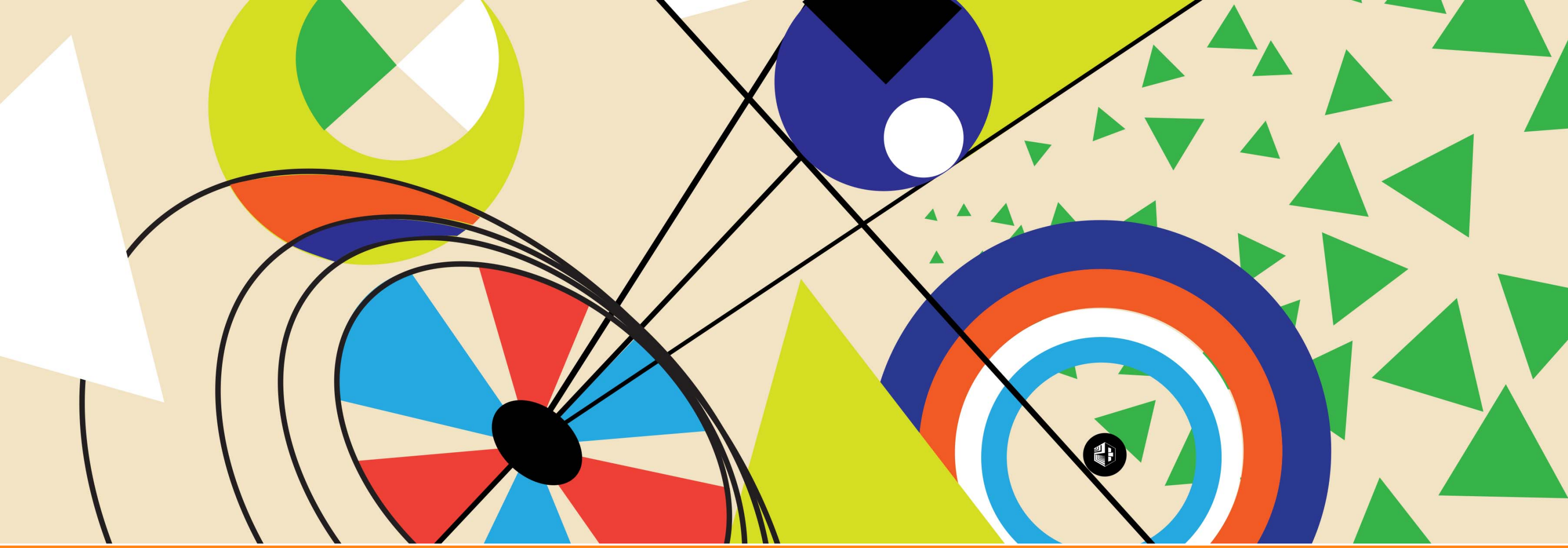


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U4. Algunos teoremas importantes

Teorema de Ceva

Definición 0.1

Se llama recta ceviana a cualquier recta que pasa por un vértice de un triángulo pero que no coincide con ningún lado del mismo.

Teorema 0.1

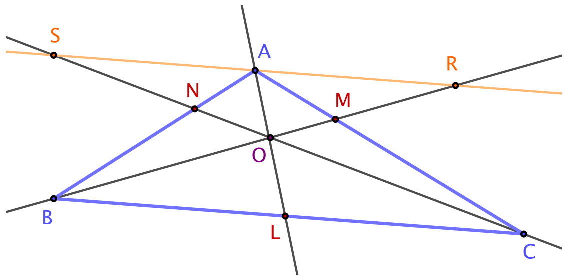
Si tres líneas AO, BO y CO, dibujadas por los vértices de un triángulo ABC y un punto O del plano, cortan los lados opuestos en L, M, y N respectivamente, entonces $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

Demostración

Para realizar la demostración trazaremos una recta auxiliar paralela a BC que pase por A y consideremos a R y S los puntos de intersección de esta recta paralela con las prolongaciones de BM y CN respectivamente.

Consideremos ahora diferentes pares de triángulos semejantes:

1. $\triangle NAS \approx \triangle NBC$.
   Luego, $\frac{NA}{NB}=\frac{AS}{BC} \Rightarrow \frac{-AN}{NB}=\frac{AS}{BC}$...(1)
2. $\triangle MBC \approx \triangle MRA$.
   Luego, $\frac{CM}{AM}=\frac{BC}{RA} \Rightarrow \frac{CM}{-MA}=\frac{BC}{RA}$...(2)
3. $\triangle OBL \approx \triangle ORA$.
   Luego, $\frac{BL}{RA}=\frac{LO}{AO}$...(3)
4. $\triangle OAS \approx \triangle OLC$.
   Luego, $\frac{AS}{LC}=\frac{OA}{OL}$...(4)



Ahora multiplicamos (1), (2), (3) y (4), de donde obtenemos:

$$\frac{-AN}{NB}\cdot\frac{CM}{-MA}\cdot\frac{BL}{RA}\cdot\frac{AS}{LC}=\frac{AS}{BC}\cdot\frac{BC}{RA}\cdot\frac{LO}{AO}\cdot\frac{OA}{OL}$$

$$\Rightarrow \frac{-AN}{NB}\cdot\frac{CM}{-MA}\cdot\frac{BL}{LC}=\frac{AS}{RA}\cdot\frac{RA}{AS}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{BL}{LC}=1$$

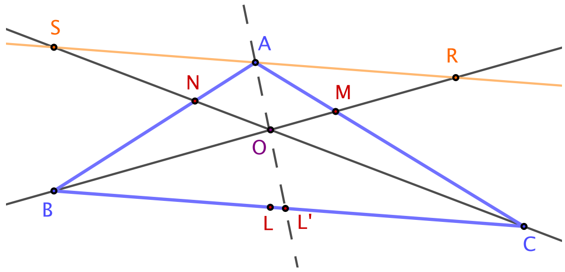
$$\therefore \frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \quad \blacksquare$$

QED

Teorema 0.2

Si L, M, y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para los cuales se cumple $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$, *entonces AL, BM, y CN son concurrentes.*

Demostración



Para demostrar la concurrencia, prolongaremos las rectas BM y CN hasta que se intersecten en un punto, a ese punto lo llamaremos O. Ahora tracemos la recta AO y supongamos que se intersecta con BC en L', es decir, AL' es una recta ceviana.
Luego por el teorema anterior $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.
Pero también tenemos por hipótesis que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.
Por lo que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$, luego $\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$, por lo que $L = L'$, es decir, AL pasa por O que es la intersección de BM y CN.
Por tanto AL, BM, y CN son concurrentes. **QED**

De la demostración de estos dos teoremas podemos enunciar el célebre teorema de Ceva.

Teorema 0.3. Teorema de Ceva

Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.

Teorema 0.4. Forma Trigonométrica del Teorema de Ceva

Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si $\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1$.

Demostración

$\Rightarrow$] Supongamos que las cevianas AL, BM y CN del $\triangle ABC$ son concurrentes en el punto O.
Por el teorema de la bisectriz generalizada tenemos que:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC \text{ sen } ACN}{CB \text{ sen } NCB} ...(1) \quad \frac{BL}{LC} = \frac{BA \text{ sen } BAL}{AC \text{ sen } LAC} ...(2) \quad \frac{CM}{MA} = \frac{CB \text{ sen } CBM}{BA \text{ sen } MBA} ...(3)$$

Pero por hipótesis tenemos que AL, BM y CN concurren en el punto O, por lo que satisfacen el teorema de Ceva, de donde $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$,

$$\Rightarrow \frac{AC \text{ sen } ACN}{CB \text{ sen } NCB} \cdot \frac{BA \text{ sen } BAL}{AC \text{ sen } LAC} \cdot \frac{CB \text{ sen } CBM}{BA \text{ sen } MBA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$] Supongamos que L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC repectivamente, tales que cumplen $\frac{sen\,ACN}{sen\,NCB} \cdot \frac{sen\,BAL}{sen\,LAC} \cdot \frac{sen\,CBM}{sen\,MBA} = 1$. Queremos demostrar que AL, BM y CN son concurrentes.

Para la demostración se siguen los pasos anteriores en el sentido inverso hasta llegar a que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$, lo cual, por el teorema de Ceva implica que las rectas AL, BM y CN son concurrentes. **QED**

Ejercicios para ir pensando

1. Demuestra que las medianas de un triángulo son concurrentes.
2. Demuestra que las alturas de un triángulo son concurrentes.
3. Demuestra que la bisectriz interior de cualquier ángulo de un triángulo no isósceles ABC y las bisectrices exteriores de los otros dos ángulos son concurrentes.
4. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R respectivamente, entonces las rectas AP, BQ y CR son concurrentes. Al punto de concurrencia se le llama punto de Gergonne del triángulo.