Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

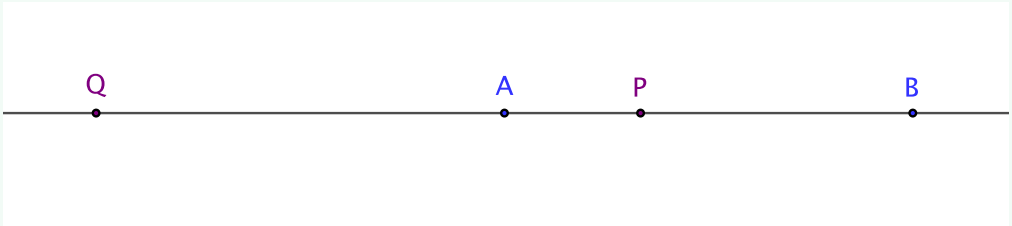
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U3. Introducción a la geometría moderna

Puntos armónicos

Definición 0.1

Si P es un punto, distinto de A y B, que divide al segmento AB en una razón r dada y Q divide al mismo segmento en la razón $-r$, se dice que el punto Q es el conjugado armónico de P con respecto de AB. Es decir, $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.



♣

Teorema 0.1

Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces Q es conjugado armónico de P respecto del segmento BA.

♡

Demostración

Si Q es conjugado armónico de P respecto de AB, entonces $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$. Luego, $\frac{PB}{AP} = -\frac{QB}{AQ}$, lo que implica $\frac{-BP}{-PA} = -\frac{-BQ}{-QA} \Rightarrow \frac{BP}{PA} = -\frac{BQ}{QA}$. Por tanto Q es el conjugado armónico de P con respecto de BA. **QED**

Teorema 0.2

Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces P es conjugado armónico de Q respecto del segmento AB.

♡

Demostración

Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = -\frac{AP}{PB}$. **QED**

Definición 0.2

Se dice que P y Q son conjugados armónicos respecto de AB o bien que el segmento AB está dividido armónicamente por P y Q.

♣

Teorema 0.3

Si P y Q son conjugados armónicos respecto de AB, entonces A y B son conjugados armónicos respecto del segmento PQ. Se dice entonces que A, B, P y Q son una hilera armónica.

♡

Demostración

$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = -\frac{PB}{QB} \Rightarrow \frac{-PA}{AQ} = -\frac{PB}{-BQ} \Rightarrow \frac{PB}{BQ} = -\frac{PA}{AQ}$. Lo que implica que B y A son conjugados armónicos respecto de PQ. **QED**

Nota *La demostración de estos teorema nos permite ver que las permutaciones por parejas de conjugados armónicos de los puntos AB y PQ son una hilera armónica.*

Definición 0.3

Dadas dos parejas de puntos A, B y P, Q, se define su razón cruzada como la razón $\frac{\frac{AP}{PB}}{\frac{AQ}{QB}}$, lo que se denota como (AB, PQ).

♣

Proposición 0.1

Si A, B, P y Q es una hilera armónica, entonces $(AB, PQ) = -1$. Además, todas sus permutaciones (tomadas por parejas de puntos armónicos) cumplen que su razón cruzada es igual a -1.

♠

Demostración

Sean A, B, P y Q una hilera armónica, además consideremos que P y Q son conjugados armónicos de A y B, entonces $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$, luego $\frac{\frac{AP}{PB}}{\frac{AQ}{QB}} = \frac{-\frac{AQ}{QB}}{\frac{AQ}{QB}} = -1$. Por tanto $(AB, PQ) = -1$.

Por los teoremas anteriores, tenemos que

$(AB, PQ) = -1 \Leftrightarrow (AB, QP) = -1 \Leftrightarrow (BA, PQ) = -1 \Leftrightarrow (BA, QP) = -1 \Leftrightarrow (PQ, AB) = -1 \Leftrightarrow (PQ, BA) = -1 \Leftrightarrow (QP, AB) = -1 \Leftrightarrow (QP, BA) = -1$.

Ejercicios para ir pensando

1. Sean A, B puntos colineales y un punto P que divide al segmento AB en una razón r, construir con regla y compás (determinar el valor) el punto Q, tal que Q sea conjugado armónico de P.