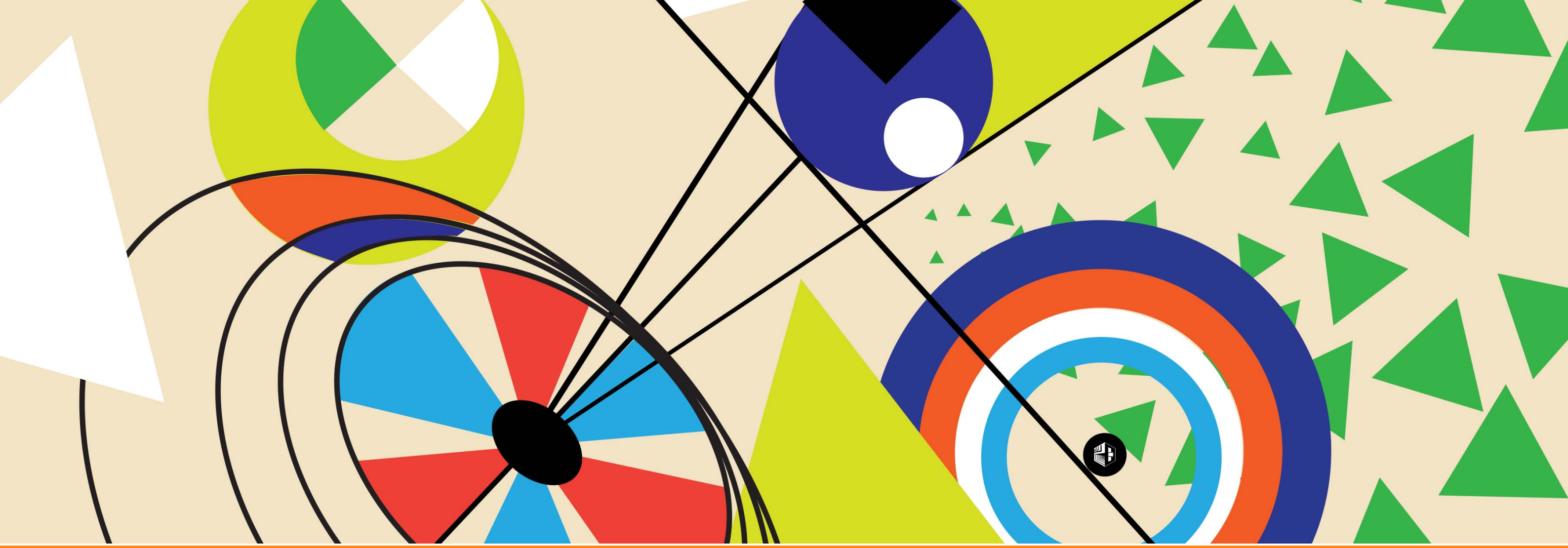


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U3. Introducción a la geometría moderna

Segmentos dirigidos

Ejercicio 2.- Generalice la fórmula de **Chasles** Para más de tres puntos colineales.

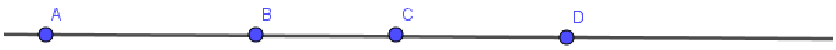
Para este nuevo ejercicio vamos a generalizar dos proposiciones análogas a la proposición 0.1 de las notas 1.

Proposición 0.1. Proposición previa para cuatro puntos

Sean A, B, C y D puntos colineales, entonces:

$AB + BC + CD = AD$

Demostración



Como A, C y D son colineales por la proposición 0.2 de las notas 1, para tres puntos tenemos que: $AC + CD = AD$, pero AC contiene a B y A, B y C son colineales, entonces $AB + BC = AC$. Así $AC + CD = AB + BC + CD = AD$.

Q.E.D.

Proposición 0.2. Proposición para n puntos

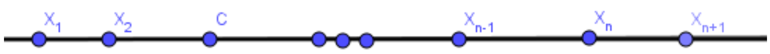
Con $n \geq 4$. Sean X_1, X_2,....., X_n puntos colineales, entonces:

$X_1X_2 + X_2X_3 + ... + X_{n-1}X_n = X_1X_n \iff \sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) = X_1X_n$.

Demostración (Por inducción) (Para $n \geq 3$)

Para $n = 3$ **y para** $n = 4$ ya sabemos que si se cumple.

Supongamos que se vale para n, i.e $\sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) = X_1X_n$. P.d. que se cumple para $n + 1$, i.e $\sum_{i=1}^{n}(X_iX_{i+1}) = X_1X_{n+1}$.



Tomamos un punto X_{n+1} en la recta que contiene a los n puntos, donde X_{n+1} está a la derecha de X_n. Así X_{n+1} es colineal con todos los demás puntos.

Como X_1, X_n y X_{n+1} son colineales, entonces: $X_1X_n + X_nX_{n+1} = X_1X_{n+1}$; pero por hipótesis de inducción: $\sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) = X_1X_n$, entonces: $\sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) + X_nX_{n+1} = X_1X_{n+1}$.
Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n}(X_iX_{i+1}) = X_1X_{n+1}$ **Q.E.D.**

Teorema 0.1

Si X_1, X_2,....,X_n *son colineales, entonces* $X_1X_2 + X_2X_3 + ... + X_{n-1}X_n + X_nX_1 = 0$

Demostración

Por la proposición anterior para n puntos $\sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) = X_1X_n \iff \sum_{i=1}^{n-1}(X_iX_{i+1}) - X_1X_n = 0$ $\iff X_1X_2 + X_2X_3 + ... + X_nX_1 = 0$. **Q.E.D**

Teorema 0.2. Teorema de Euler

Si A, B, C *y* D *son cuatro puntos colineales, entonces* $AB(CD) + AC(DB) + AD(BC) = 0$

Demostración

Por hipótesis tenemos que A, B y C son colineales, entonces $AB + BC = AC$. Podemos alternar tres tercias de puntos colineales de la siguiente forma:
Para A, D y B colineales tenemos que $AB = AD + DB$....(1).
Para A, D y C colineales tenemos que $AC = AD + DC$....(2).
Para B, D y C colineales tenemos que $BC = BD + DC$....(3).

Reescribimos las fórmulas de (1),(2) y (3) de la siguiente manera.
De (1) $AB = DB - DA$.
De (2) $AC = DC - DA$.
De (3) $BC = DC - DB$.

Es decir, reescribimos (1),(2) y (3) con uno de los segmentos fijo y el otro con sentido contrario agregando un signo negativo para conservar la igualdad.

Entonces $AB(CD) + AC(DB) + AD(BC) = (DB - DA)CD + (DC - DA)DB + AD(DC - DB)$
$= CD(DB) - CD(DA) + DC(DB) - DB(DA) + AD(DC) - AD(DB)$
$= DB(CD + DC) - DA(CD + DC) - DB(DA + AD) = DB(0) - DA(0) - DB(0) = 0$.

Por lo tanto $AB(CD) + AC(DB) + AD(BC) = 0$. **Q.E.D.**

Ejercicio 3.- Demuestra que si A, B y C son tres puntos colineales y D es cualquier otro puntos en el planto, entonces:

$$DA^2(BC) + DB^2(CA) + DC^2(AB) + AB(BC)(CA) = 0 \tag{1}$$

Demostración Por casos

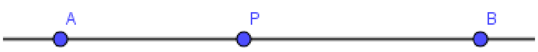
Caso 1 D es un punto colineal con A, B y C, este caso se conoce como la fórmula de Stewart. Sean A, B, C y D cuatro puntos alineados, entonces usando que $AB+BC = AC \Rightarrow AB = CB-CA$, sustituimos esta última expresión en la ecuación (1) en su miembro derecho que contiene los términos cuadráticos.

$DA^2(BC) + (DB^2)(CA) + DC^2(AB) = DA^2(BC) + DB^2(CA) + DC^2(CB - CA$
$= DA^2(BC) + DB^2(CA) + DC^2(CB) - DC^2(CA) = BC(DA^2 - DC^2) + CA(DB^2 - DC^2)$
$= BC(DA + DC)(DA - DC) + CA(DB + DC)(DB - DC) = BC(DA + DC)CA + CA(DB + DC(CB) = CA(BC)[(DA + DC) - (DB + DC)] = (CA)(BC)(DA - DB)) = CA(BC)(BA) = -AB(BC)(CA)$

Por lo tanto $DA^2(BC)+(DB^2)(CA)+DC^2(AB) = -AB(BC)(CA) \Longleftrightarrow DA^2(BC)+(DB^2)(CA)+DC^2(AB) + AB(BC)(CA) = 0$

Caso 2 La demostración se queda como ejercicio para el alumno.

Ejercicio 4.- Suponiendo que A , B y P son tres puntos colineales tales que $r = \dfrac{AP}{PB}$ encuentra los valores de: $\dfrac{BP}{PA}, \dfrac{AB}{BP}, \dfrac{PB}{BA}, \dfrac{BA}{AP}$ y $\dfrac{PA}{AB}$.



Solución

(1) $\dfrac{AP}{PB} = r \Longleftrightarrow \dfrac{PB}{AP} = \dfrac{BP}{PA} = \dfrac{1}{r}$ *Por lo tanto* $\dfrac{BP}{PA} = \dfrac{1}{r}$

(2) $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AP+PB}{BP} = \dfrac{AP}{BP} + \dfrac{PB}{BP} = \dfrac{AP}{BP} - 1$. *Como* $r = \dfrac{AP}{PB}$, *entonces* $\dfrac{AP}{BP} = -r$. *Por lo tanto* $\dfrac{AB}{BP} = -(1+r)$

(3) Por (2) sabemos que $\dfrac{AB}{BP} = -(1+r)$, *entonces* $AB = -(1+r)BP \Longleftrightarrow BA = (1+r)PB \Longleftrightarrow \dfrac{PB}{BA} = \dfrac{1}{1+r}$

(4) $\frac{BA}{AP} = \frac{BP+PA}{AP} = \frac{BP}{AP} + \frac{PA}{AP} = \frac{BP}{PA} - 1$. *Como* $r = \frac{PA}{BP}$, *entonces* $\frac{BP}{PA} = \frac{1}{r} \iff \frac{BP}{AP} = -\frac{1}{r}$.
Por lo tanto $\frac{BA}{AP} = -(1 + \frac{1}{r})$

(5) *Como* $\frac{BA}{AP} = -\frac{1+r}{r}$, *concluimos que* $\frac{PA}{AB} = -\frac{r}{1+r}$