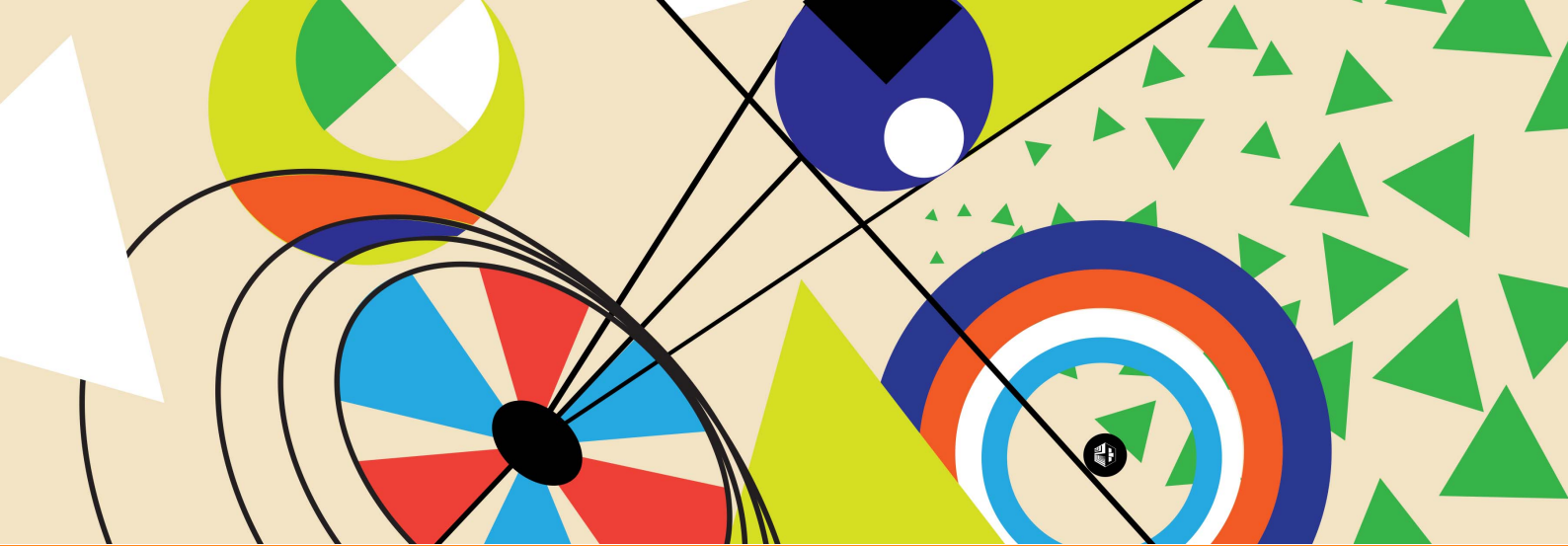




Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021



Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U3. Introducción a la geometría moderna

Homotecia

Definición 0.1

Se llama homotecia con centro en un punto O y razón $k \neq 0$, denotada por $H_{O,k}$, a la transformación que asocia a cada punto P en el plano, distinto de O , un punto P' tal que:

- O, P y P' son colineales,
- $OP' = kOP$ y
- la imagen del punto O es el mismo punto O .

Al punto O se le llama centro de homotecia y a k se le llama la razón de homotecia.

Observación

Sea $H_{O,k}$ una homotecia con centro en el punto O , $k \neq 0$ y sea P un punto cualquiera, distinto de O , en el plano:

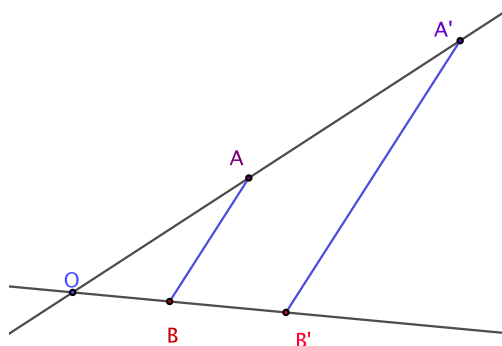
- Si $k = 1$, entonces $OP' = 1 \cdot OP$, luego $OP' = OP$, de donde $P' = P$, es decir, $H_{O,k}(P) = P$, a esta homotecia se le conoce como la homotecia identidad.
- Si $k > 1$, entonces $kOP = OP' > OP$.
- Si $0 < k < 1$, entonces $kOP = OP' < OP$.
- Si $k = -1$, entonces $H_{O,k}(P) = P'$, donde la longitud de $OP = OP'$, pero tienen sentidos contrarios con respecto de O . A esta homotecia se le llama simetría.

Teorema 0.1

Sea $H_{O,k}$ una homotecia con centro en el punto O , $k \neq 0$, y A, B , dos puntos tales que O, A y B no son colineales. Si $H_{O,k}(A) = A'$ y $H_{O,k}(B) = B'$, entonces $A'B'$ es paralelo al segmento AB y $A'B' = kAB$.

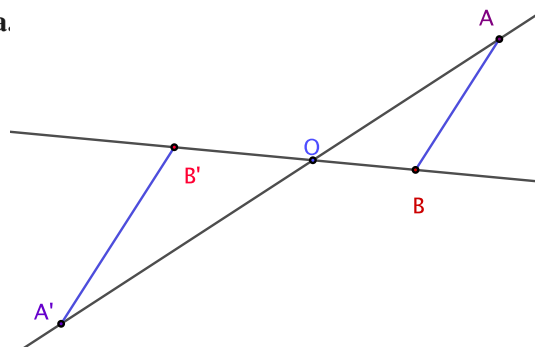
Demostración

Caso 1. Si k es positiva.



En este caso, A y A' están en la misma semirecta determinada por O , al igual que B y B' . Además, tenemos que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$, entonces por el inverso del teorema de Thales $AB \parallel A'B'$ y $\triangle OAB \approx \triangle OA'B'$.

Caso 2. Si k es negativa.



En este caso tenemos que A y A' están en semirrectas distintas determinadas por O , al igual que B y B' . Consideremos $\triangle OAB$ y $\triangle OA'B'$, los cuales son semejantes pues tienen un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales, de donde sus ángulos correspondientes son iguales, luego $AB \parallel A'B'$.

Nos falta ver, en ambos casos, que $A'B' = kAB$. Por la semejanza de triángulos en ambos casos, se tiene que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$, por lo que $A'B' = kAB$. **QED**

Observación

- Considerando la observación anterior, tenemos que si $k > 1$, entonces $A'B' = kAB > AB$; si $0 < k < 1$, entonces $A'B' = kAB < AB$.
- Por la misma observación y del resultado anterior, tenemos que si $k = -1$, los segmentos AB y $A'B'$ tienen la misma longitud pero están de lados contrarios con respecto de O , es decir, la homotecia es una simetría.
- Por tanto, si $|k| < 1$ entonces la longitud del segmento $A'B' < AB$ y si $|k| > 1$ entonces la longitud del segmento $A'B' > AB$.

Problema: *Dados el centro de homotecia y el homotético de un punto cualquiera en el plano, ¿es posible determinar el homotético de cualquier otro punto P ?*

Solución

Sea O el centro de homotecia, P un punto en el plano y P' su transformado bajo una homotecia con centro en O y constante de homotecia k . Se tiene que O , P y P' son colineales. Para determinar el homotético de un punto cualquiera R que no está en la recta OP se trazan las rectas OR y PR . Por el punto P' se traza la paralela a PR . Sea R' la intersección de esta paralela con OR , entonces afirmamos que $H_{O,k}(R) = R'$.

- La demostración se deja como actividad para el alumno.
- ¿Qué sucede en el caso en que R esté sobre OP ?



Nota De los resultados anteriores se sigue que la homotecia transforma puntos en puntos, rectas en rectas paralelas y polígonos en polígonos semejantes de lados paralelos.

Ejercicios para ir pensando

1. Bajo una homotecia con centro en un punto O y constante de homotecia k , tres puntos colineales se transforma en tres puntos colineales.
2. Bajo una homotecia con centro en un punto O y constante de homotecia k , un polígono se transforma en un polígono semejante de lados paralelos.

Problema: ¿Si se tienen dos polígonos semejantes de lados paralelos serán entonces homotéticos?

Teorema 0.2

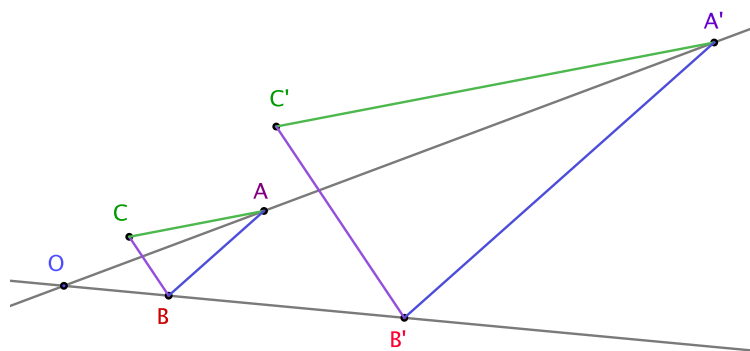
Sean T_1 y T_2 dos triángulos semejantes de lados paralelos entonces existe una homotecia tal que T_2 es el homotético de T_1 .



Demostración

Consideremos los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ los cuales son semejantes con lados correspondientes paralelos. Por tanto, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$, con k la constante de semejanza de los triángulos.

- Si $k \neq 1$, consideramos O al punto de intersección de AA' con BB' y consideramos los $\triangle OAB$ y $\triangle OA'B'$. En estos, como $AB \parallel A'B'$, por el teorema de Tales, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ y por (LAL) $\triangle OAB \approx \triangle OA'B'$. Luego, como $\frac{A'B'}{AB} = k$, entonces $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Además, por construcción O , A y A' son colineales, al igual que O , B y B' . Por tanto, la homotecia con centro en O y constante de semejanza k lleva a A en A' y B en B' .



Ahora, falta demostrar que C' es el homotético de C bajo la misma homotecia. Entonces consideremos la recta OC y supongamos que no pasa por C' , entonces sea C'' la intersección de OC con $B'C'$, por el teorema de Tales $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC''}{OC} = k$ y $\triangle OBC \approx \triangle OB'C''$, de donde, $\frac{B'C''}{BC} = k$, pero también $\frac{B'C'}{BC} = k$, luego $B'C'' = B'C'$ y $C'' = C'$. Por lo que, los dos triángulos son homotéticos con centro de homotecia en O .

- Si $k = 1$, los triángulos son congruentes y $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, por lo que se intersectan en un punto al infinito. En este caso se dice que el centro de homotecia es el punto al infinito de esas rectas.

QED

