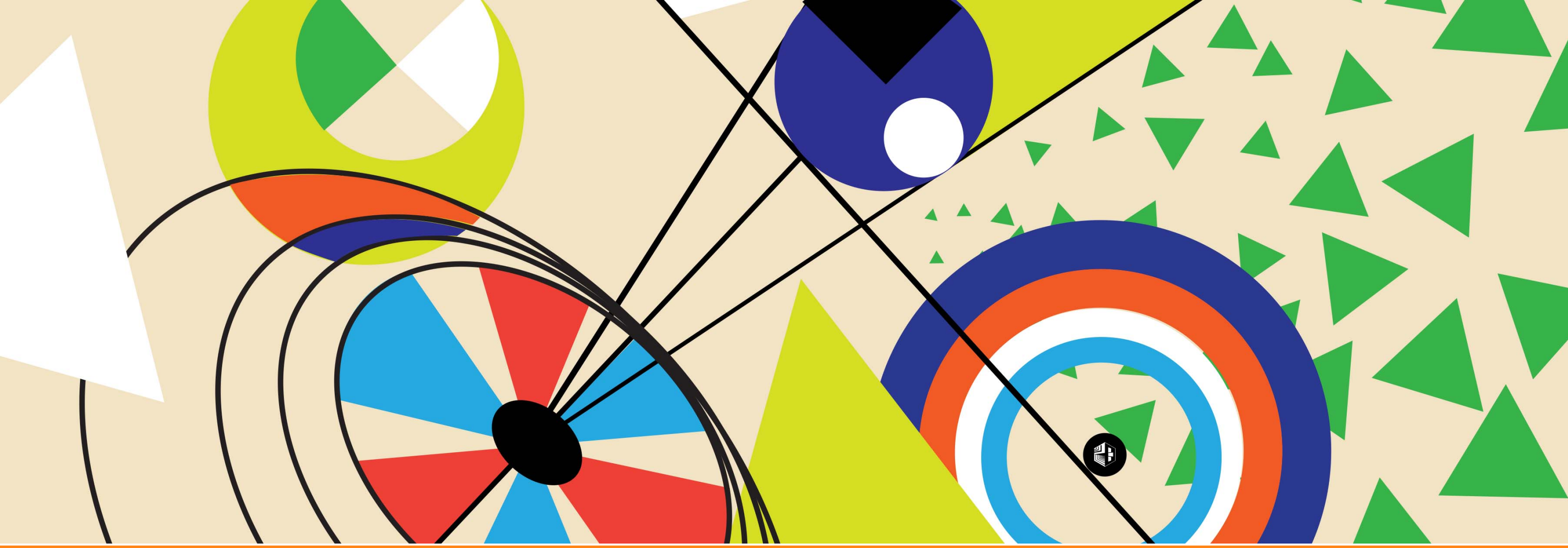


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021

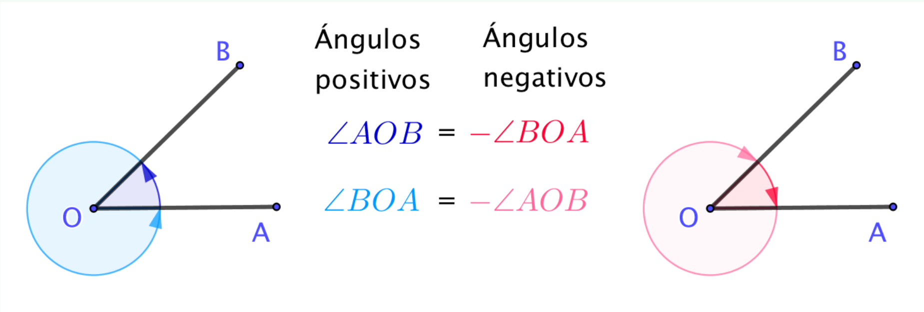
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U3. Introducción a la geometría moderna

Rectas armónicas

Definición 0.1

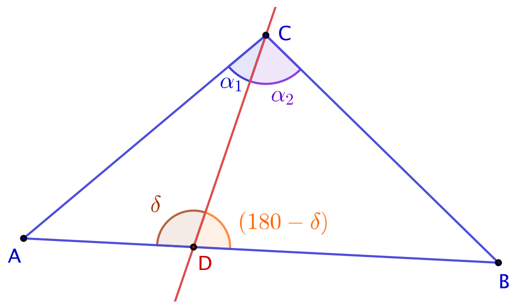
Se considera que un ángulo es positivo cuando su sentido es contrario a las manecillas del reloj. En caso contrario, se dice que el ángulo es negativo. Así, en la figura tenemos los ángulos positivos $\angle AOB$ y $\angle BOA$. Mientras que $\angle BOA$ y $\angle AOB$ tomados en el sentido de las manecillas del reloj son negativos. Considerando lo anterior se tiene que $\angle AOB = -\angle BOA$.



Teorema 0.1. Teorema de la bisectriz generalizada

Sea ABC un triángulo si se traza una recta por el vértice C que divida al segmento AB en un punto D, entonces se tiene que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}$, donde α_1 y α_2 son los ángulos generados por la recta CD que conforman el ángulo ACB.

Demostración



Por la ley de senos, en el $\triangle ADC$ se tiene que $\dfrac{AD}{sen\ \alpha_1} = \dfrac{AC}{sen\ \delta}$...(1). De igual forma, en el $\triangle DBC$ se tiene $\dfrac{DB}{sen\ \alpha_2} = \dfrac{BC}{sen\ 180-\delta}$...(2).

Entonces, de (1) se tiene que $AD = \dfrac{AC\ sen\ \alpha_1}{sen\ \delta}$; de (2) se sigue que $DB = \dfrac{BC\ sen\ \alpha_2}{sen\ (180-\delta)}$, pero $sen\ (180-\delta) = sen\ (\delta)$, luego $DB = \dfrac{BC\ sen\ \alpha_2}{sen\ \delta}$.

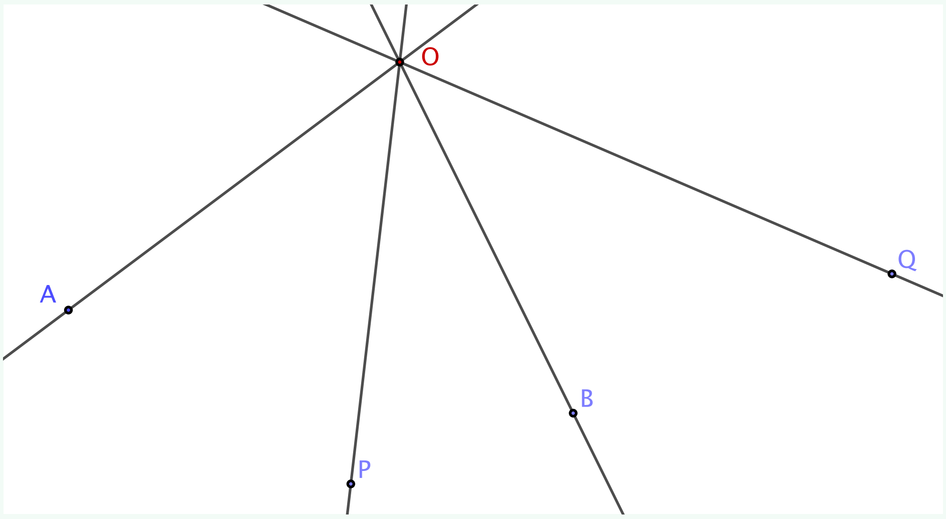
Por lo que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{\frac{AC\ sen\ \alpha_1}{sen\ \delta}}{\frac{BC\ sen\ \alpha_2}{sen\ \delta}} = \dfrac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}$.

Por tanto $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}$. **QED**

Nota *Se deja como tarea al alumno verificar que el teorema se cumple sin importar si el punto D está entre los puntos A y B o fuera de ellos.*

Definición 0.2

Si OA, OB, OP y OQ son cuatro rectas concurrentes, decimos que OP y OQ son conjugadas armónicas con respecto a OA y OB, si $\dfrac{sen\ \angle AOP}{sen\ \angle POB} = -\dfrac{sen\ \angle AOQ}{sen\ \angle QOB}$.

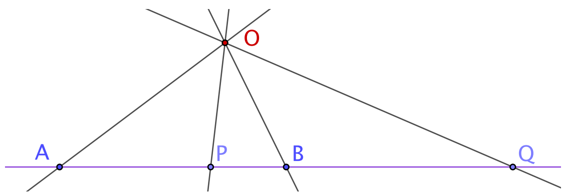


En este caso se dice que el haz formado por OA, OB, OP y OQ es un haz armónico. Lo cual se denota por $O(AB,PQ) = -1$. ♣

Teorema 0.2

La hilera de puntos en que las rectas de un haz armónico, cortan cualquier recta que no pase por su vértice es una hilera armónica. De igual forma, al unir los puntos de una hilera armónica con un punto cualquiera del plano que no sea colineal con la hilera, se tiene un haz armónico. ♡

Demostración



$\Rightarrow$] Como el haz de rectas $O(AB,PQ)$ es un haz armónico, es decir $O(AB,PQ) = -1$, se tiene que $\dfrac{sen\ \angle AOP}{sen\ \angle POB} = -\dfrac{sen\ \angle AOQ}{sen\ \angle QOB}$. Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\dfrac{OA}{OB}$ y obtenemos:

$$\frac{OA}{OB}\left(\frac{sen\ \angle AOP}{sen\ \angle POB}\right) = \frac{OA}{OB}\left(-\frac{sen\ \angle AOQ}{sen\ \angle QOB}\right) \Rightarrow \frac{OA\ sen\ \angle AOP}{OB\ sen\ \angle POB} = -\frac{OA\ sen\ \angle AOQ}{OB\ sen\ \angle QOB}.$$

Luego por el teorema de la bisectriz generalizada se tiene que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{OA\ sen\ \angle AOP}{OB\ sen\ \angle POB} \text{ y } -\frac{AQ}{QB} = -\frac{OA\ sen\ \angle AOQ}{OB\ sen\ \angle QOB}).$$

Por lo que $\dfrac{AP}{PB} = -\dfrac{AQ}{QB}$.

Por tanto $(AB,PQ) = -1$.

$\Leftarrow$] La demostración del inverso se da de manera automática de la demostración anterior.

Nota *Observa que de este resultado se obtiene lo siguiente:*

- *Si OP y OQ son conjugadas armónicas de OA y OB, entonces OA y OB son conjugadas armónicas respecto de OP y OQ. Además, cualquier permutación de parejas de rectas conjugadas es un haz armónico.*
- *Si un haz de rectas es cortado transversalmente en una hilera armónica de puntos, entonces cualquier otra transversal del haz también corta sus líneas en una hilera armónica de puntos.*

Ejercicios para ir pensando

1. Si A, B, P, Q son cuatro puntos armónicos entonces los segmentos AP, AB y AQ están en progresión armónico, esto es: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$.
2. Las rectas que unen cualquier punto de una circunferencia a los vértices de un cuadrado inscrito, forman un haz armónico.
3. Sea ABC un triángulo y L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, entonces el haz $L(MN, AB)$ es armónico.