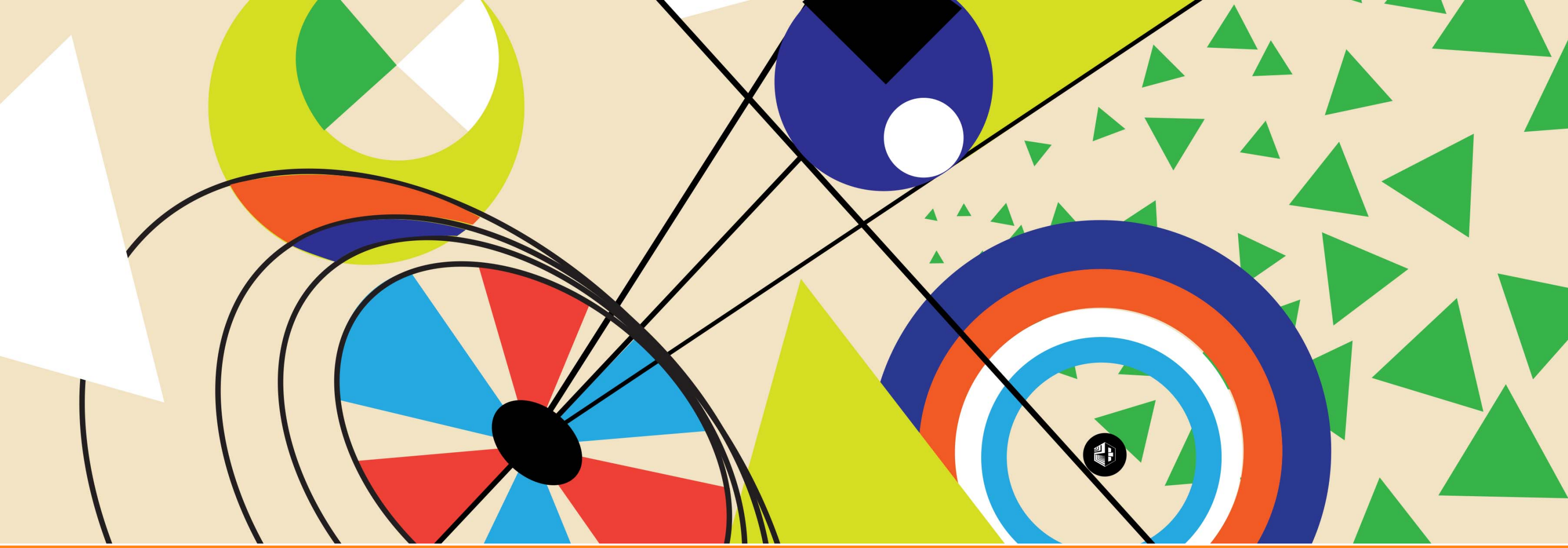


Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

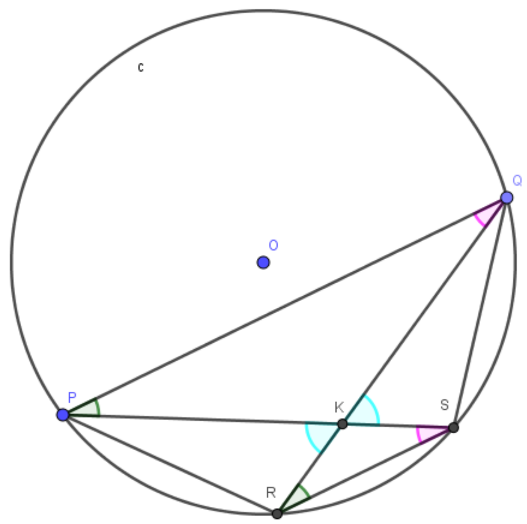
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

Ángulos de la circunferencia y Cuadriláteros cíclicos

Problema: *Si PQ y RS son dos cuerdas paralelas en una circunferencia, entonces $PR = QS$.*

Demostración



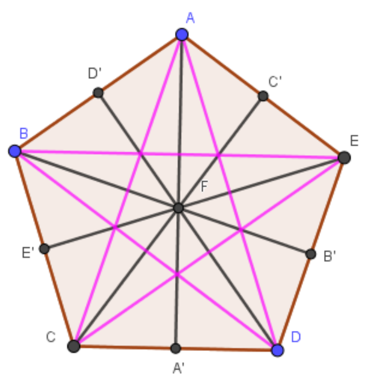
Sean PQ y RS dos cuerdas de una circunferencia con centro en O. Por hipótesis PQ y RS son cuerdas paralelas. Trazamos los segmentos PR y QS y trazamos las diagonales PS y QR, sea K el pundo te intersección de dichas diagonales.

Notemos que el ángulo $\angle SPQ = \angle SRQ$, pues subtienden la misma cuerda $\widehat{SQ}$, y el ángulo $\angle PQR = \angle PSR$, pues subtienden la misma cuerda $\widehat{PR}$.Entonces el $\triangle KQP$ y el $\triangle KRS$ son isósceles, entonces $PK = KQ$ y $KR = KS$.

Observemos que los triángulos PRK y QKS tienen dos pares de lados iguales, $PK = KQ$ y $KR = KS$ y el ángulo $\angle PKR = \angle SKQ$ por ser opuestos por el vértice, entonces por LAL, el $\triangle PRK \cong \triangle QKS$. Por lo tanto podemos concluir que $PR = QS$. **Q.E.D.**

Problema: *Dado un pentágono regular de lado x, determine el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.*

Solución

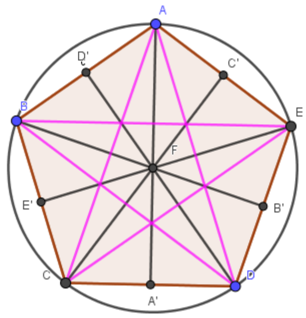


Sea $ABCDE$ un pentágono regular, el cual sabemos que es inscriptible, es decir que todos sus vertices están contenidos en una circunferencia.

Tracemos sus todas las diagonales AC, AD, BE, BD y CE; por ser un pentágono regular sabemos que todas estas diagonales son iguales entre sí.

Así, nuestras diagonales nos forman cinco triángulos congruentes por el criterio LLL: $\triangle ACD \cong \triangle ECD \cong \triangle DAB \cong \triangle CEA \cong \triangle BDE$.

Trazamos las mediatrices de cada triángulo, que por ser isósceles van del vértice al lado opuesto, por las propiedades anteriores de las rectas notables de un triángulo, las mediatrices de todos los triángulos concurren en el circuncentro F y cumple que la distancia del punto F a cualquier vértice es la misma.

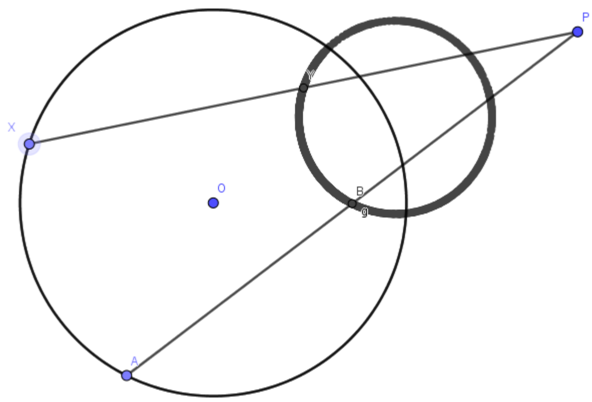


Por lo tanto podemos trazar una circunferencia de centro iguala al circuncentro de estos triángulos y radio que es la distancia del centro a cualquier vértice del pentágono.
Por el teorema de pitágoras el radio del pentágono $r = \sqrt{\frac{x^2}{4} + FY^2}$, donde Y es cuaquier punto medio de los lados del pentágono.

Problema: *Sea C una circunferencia con centro en O. Sea P un punto cualquiera exterior a la circunferencia. Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos Y, tales que Y es el punto medio del segmento PX, para X en C.*

Solución

Sea C una circunferencia con centro en O y sea P un punto exterior a dicha circunferencia. Tomemos un punto X arbitrario sobre la circunferencia y tracemos el segmento PX.
Sea Y el conjunto de puntos medios del segmento PX, que se generan cuando dicho segmento varia debido a que X va variando sobre la circunferencia.



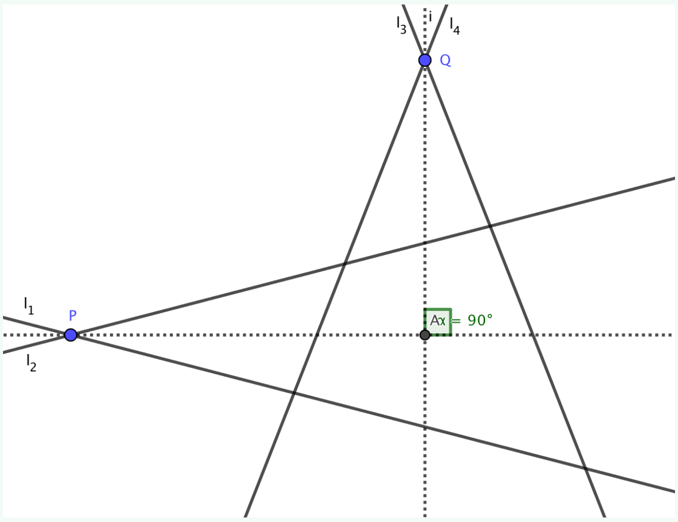
Notemos que P es un punto fijo. Si tomamos otro punto, digamos A sobre la circunferencia, al trazar el segmento AP también determinamos su punto medio B; así formamos el arco XA. Supongamos que A y X son fijos, entonces por un corolario visto en clase sabemos que si tenemos dos puntos fijos, el conjunto de puntos B que cumplen que el ángulo $\angle XPA$ es constante, consta de dos arcos de dos circunferencias del mismo radio.
Sin embargo podemos considerar que uno de los puntos X o A no es fijo, así que podemos recorrerlo hasta el otro punto que si es fijo, pero al hacer esto mi ángulo ya no es constante, por lo que se niega la proposición enunciada si alguno de los dos puntos son fijos , el conjunto de puntos B que cumplen que el ángulo XPA no es constante, consta de dos arcos de dos circunferencias de radios distintos.
Por lo tanto al ir considerando dos puntos, uno fijo y el otro no, el lugar geométrico que se forma es una circunferencia.

Q.E.D.

Rectas Antiparalelas

Definición 0.1

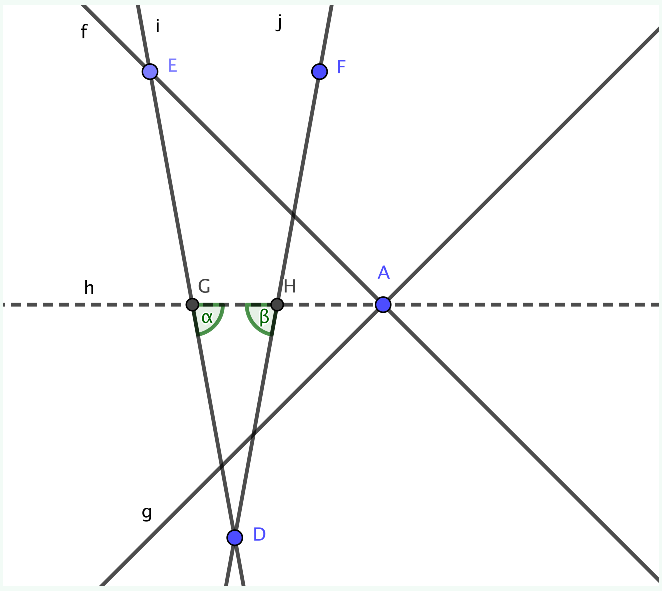
*Un par de rectas concurrentes l_1 y l_2 son **antiparalelas** respecto a otro par de rectas concurrentes l_3 y l_4, si la bisectriz del ángulo que forma el primer par de rectas es perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por las otras dos.*



♣

Definición 0.2

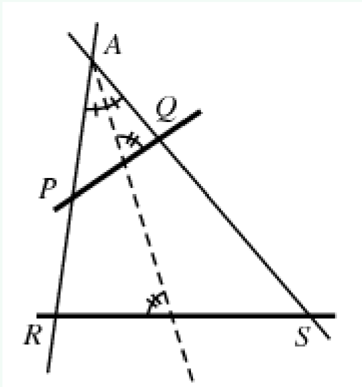
*Sean f, g y j, i dos pares de rectas tales que si la bisectriz h de las rectas f y g corta a las rectas j e i formando ángulos iguales interiores del mismo lado de la transversal, entonces se dice que las rectas j e i son **antiparalelas** con respecto a las rectas f y g.*



♣

Definición 0.3

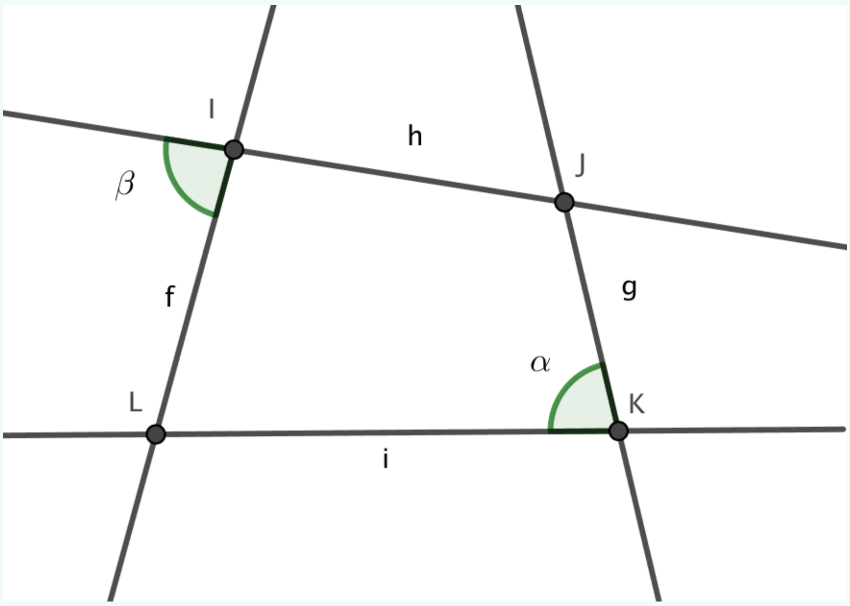
Sean PQ y RS dos rectas, decimos que son antiparalelas con respecto a los lados de un ángulo que se forma en el vértice de un triángulo $\triangle ARS$, si forman el mismo ángulo en los lados opuestos con la bisectriz de ese ángulo.



♣

Definición 0.4

Dados los pares de rectas (f, g) y (h, i) al formarse los ángulos α y β de la siguiente figura, si esos dos ángulos son iguales, entonces los pares de rectas que determinan al cuadrilátero $ILKJ$ son ***antiparalelas****.*



Usa la definición 0.3 para verificar que se cumple esta definición.

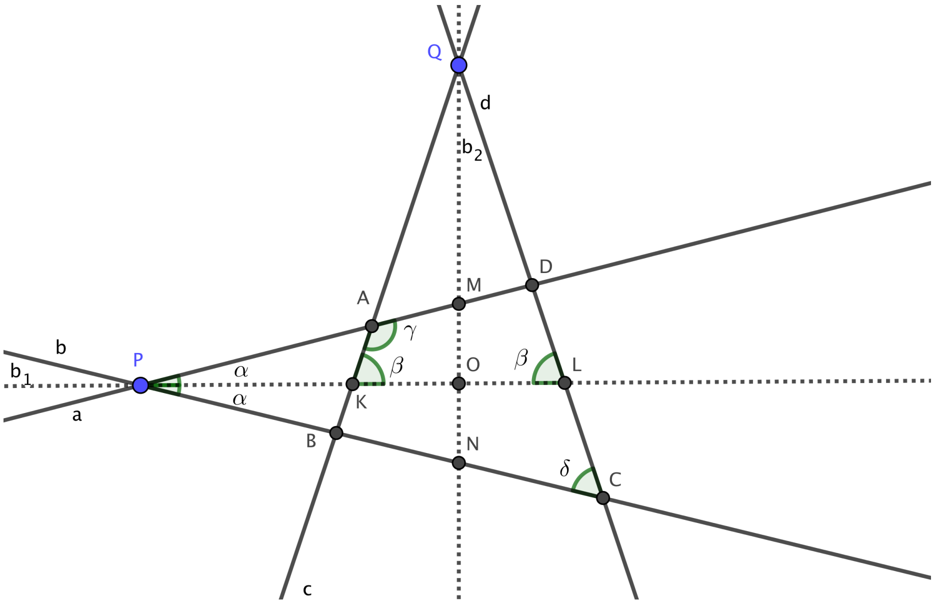
♣

Teorema 0.1

Si las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b, y si A, B, C y D son los puntos de intersección de dichas rectas, entonces el cuadrilátero ABCD es cíclico. ♡

Demostración

Sean c y d dos rectas antiparalelas con respecto a las rectas a y b como se muestra en la siguiente figura. Por demostrar que las intersecciones de dichas rectas forman un cuadrilátero cíclico.



Sean P y Q puntos de intersección de los pares de rectas (a,b) y (c,d) respectivamente. Sean A, B, C y D puntos de intersección las rectas antiparalelas y sean K y L los puntos de intersección de c y d con la bisectriz b_1 del ángulo $\angle P$. Sean M y N los puntos de intersección de a y b con la bisectriz b_2 del ángulo $\angle Q$ y por último sea O el punto de intersección de las bisectrices b_1 y b_2. Por la proposición 0.5 de las notas 5 o por la definición 2 enunciada en estas notas, podemos decir que los triángulos PNM y QKL son isósceles por lo que $\angle LKA = \angle DLK = \beta$. Nombramos $\angle BAD = \gamma$ y $\angle DCE = \delta$. Para demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico basta con probar que $\gamma + \delta = 180°$.

Sean los ángulos α los que determina la bisectriz b_1. Notemos que $\angle PLC = 180° - \beta$ y $\alpha + \delta + \angle PLC = 180°$, pues son los ángulos interiores del triángulo LPC, entonces $\delta = 180° - \alpha - \angle PLC$, pero $\angle PLC = 180° - \beta$, entonces $\beta = 180° - \angle PLC$; esto implica que $\delta = 180° - \angle PLC - \alpha = \beta - \alpha$.....(1).

Ahora consideremos el $\triangle APK$ y notemos que $\angle AKP = 180° - \beta$ y $\alpha + \angle AKP + \angle PAK = 180°$, por ser ángulos interiores del triángulo mencionado; de lo anterior tenemos que $\angle PAK = 180° - \alpha - \angle AKP$, pero $\angle AKP = 180° - \beta$, entonces $\beta = 180° - \angle AKP$. Por tanto $\angle PAK = \beta - \alpha$.....(2).

Ahora $\gamma = 180° - \angle PAK = 180° - \beta + \alpha$, esto por (2). Y por (1), tenemos que $\delta = \beta - \alpha$, entonces $\gamma + \delta = \beta - \alpha + 180° - \beta + \alpha = 180°$. Por lo tanto γ y δ son suplementarios. Por lo tanto $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. **Q.E.D.**

Corolario 0.1

En cualquier cuadrilátero cíclico, cualquier par de lados opuestos son antiparalelas con respecto a los otros dos lados. ♡

Demostración

Resultado inmediato de la definición 4.

Ejercicios para ir pensando

1. Si AB y CD son rectas antiparalelas respecto al ángulo formado por BC y AD, entonces BC y AD son antiparalelas respecto al ángulo formado por AB y CD.
2. Demuestra que la tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo en un vértice es antiparalela al lado opuesto.
3. Demuestra que la recta que une los pies de las alturas de un triángulo es antiparalela al tercer lado.