



# Geometría Moderna I

## Material para el curso en línea

**Autor:** Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

**Instituto:** Facultad de Ciencias

**Fecha:** 2020



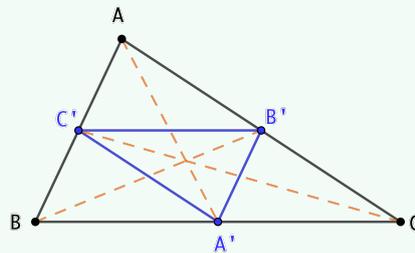
*Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320*

# Unidad 1. La geometría del triángulo

## Triángulos pedales

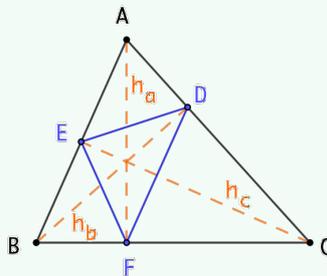
### Definición 0.1

Triángulo pedal de las medianas es el triángulo cuyos vértices son los pies de las medianas. A este triángulo también se le conoce como triángulo mediano.



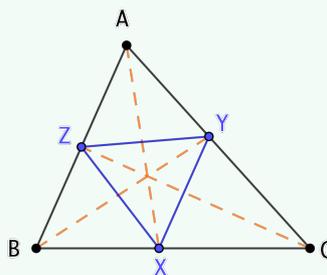
### Definición 0.2

Triángulo pedal de las alturas es el triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas. También es conocido como triángulo órtico.



### Definición 0.3

Triángulo pedal de las bisectrices es el triángulo cuyos vértices son los pies de las bisectrices.



**Teorema 0.1**

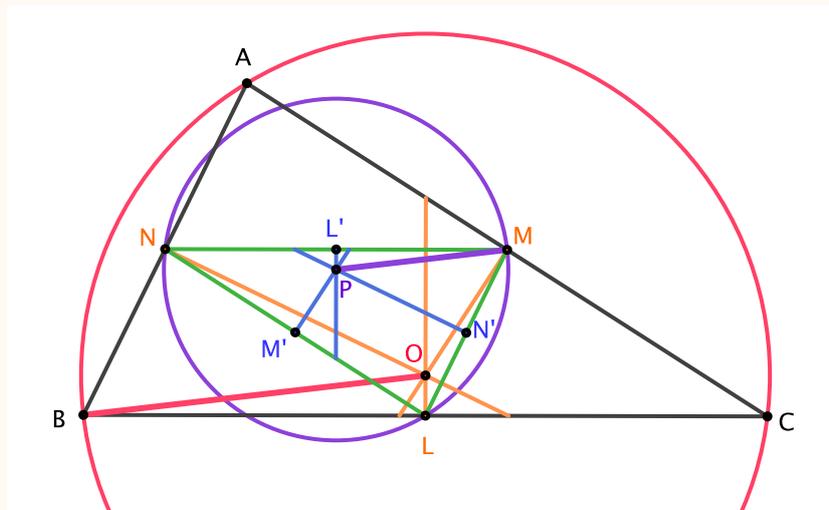
Un triángulo  $ABC$  y su triángulo mediano  $LMN$  son semejantes y sus lados son paralelos. Además, la razón de proporcionalidad entre los triángulos es  $2 : 1$ .



**Demostración** La demostración de este teorema se deja para el alumno.

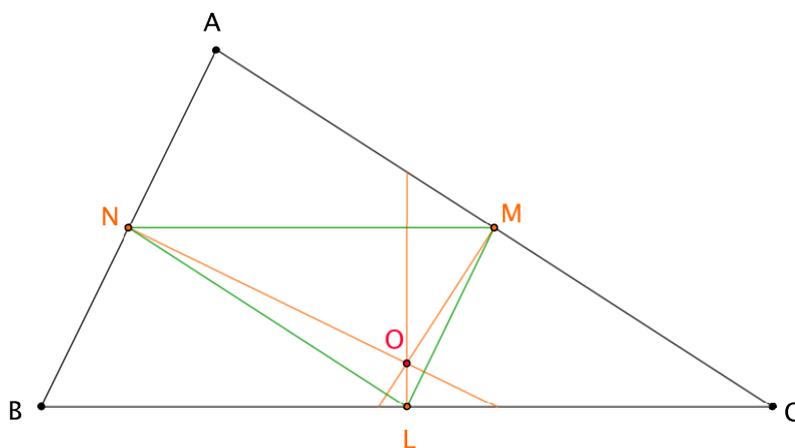
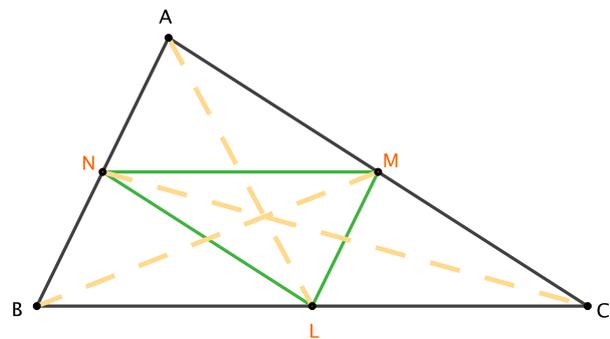
**Teorema 0.2**

El radio de un circuncírculo de un triángulo  $ABC$  es el doble del radio del circuncírculo de su triángulo mediano.

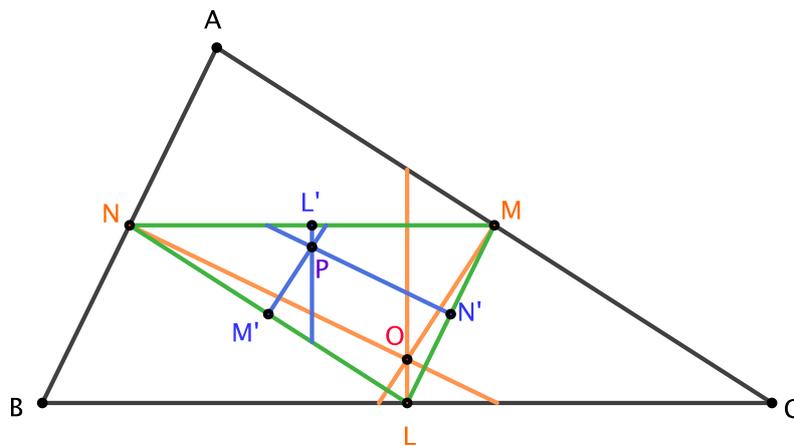


**Demostración**

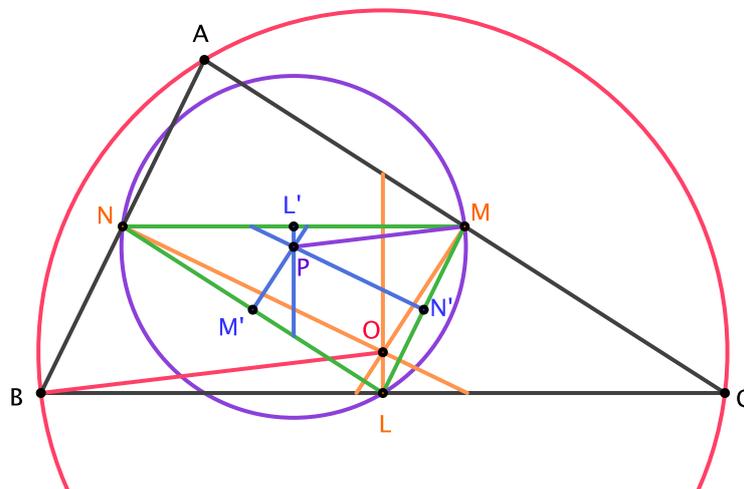
Sea el  $\triangle ABC$  y sea el  $\triangle LMN$  su triángulo mediano. Trazamos las mediatrices (perpendiculares por los puntos medios  $L, M$  y  $N$ ) del  $\triangle ABC$ , las cuales se intersecan en el circuncentro, llamado  $O$ .



Luego por los puntos medios  $N'$ ,  $L'$  y  $M'$  del  $\triangle LMN$  tracemos las mediatrices a éste, las cuales se intersectan en el circuncentro  $P$ .



Ahora, como  $O$  y  $P$  están en las mediatrices de los triángulos correspondientes, entonces tenemos que un radio del circuncírculo del  $\triangle ABC$  es  $OB$  y un radio del circuncírculo del  $\triangle LMN$  es  $MP$ . Además por el teorema anterior sabemos que  $\triangle ABC \approx \triangle LMN$  con razón de semejanza  $2 : 1$ .



Por lo tanto  $OB = 2PM$ . **QED**

### 🌀 Ejercicios para ir pensando 🌀

1. Demuestra que las medianas de dos triángulos semejantes están en la misma proporción que sus lados.
2. Demuestra que las mediatrices de dos triángulos semejantes están en la misma proporción que sus lados.



**Teorema 0.3**

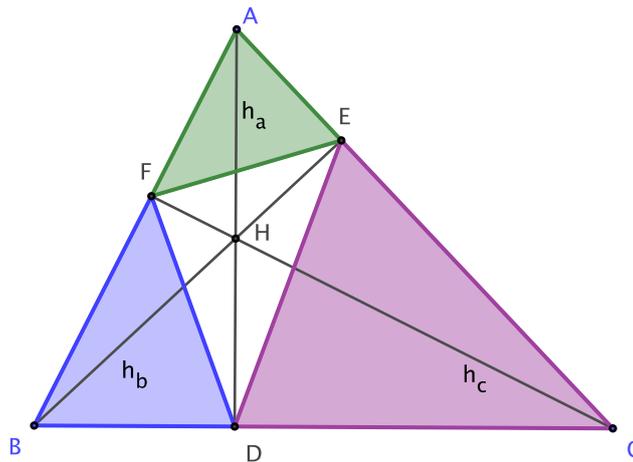
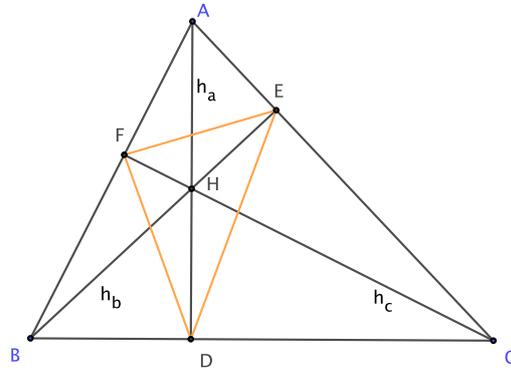
Los tres triángulos que determina el triángulo órtico, en un triángulo acutángulo, son semejantes al triángulo original.



**Demostración**

Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo, es decir, cada uno de sus tres ángulos mide menos de un ángulo recto ( $90^\circ$ ). Sean  $h_a$ ,  $h_b$  y  $h_c$  alturas del triángulo  $ABC$  con pies de las alturas  $D$ ,  $E$  y  $F$  respectivamente, las cuales además se intersecan en el ortocentro  $H$ . Luego trazamos los segmentos  $DE$ ,  $EF$  y  $FD$  que determinan el triángulo órtico.

Dado lo anterior, queremos demostrar que los triángulos  $\triangle DBF$ ,  $\triangle AEF$ ,  $\triangle DEC$  son semejantes al triángulo  $\triangle ABC$ .



Para hacer la demostración compararemos ciertas parejas de triángulos en particular.

Consideremos primero el triángulo  $\triangle ABD$  el cual tiene un ángulo recto en  $D$  y el ángulo en  $B$  agudo. Consideremos también el triángulo  $\triangle CBF$  el cual tiene un ángulo recto en  $F$  y también tiene el mismo ángulo agudo en  $B$ , es decir  $\angle DBA = \angle CBF$ .

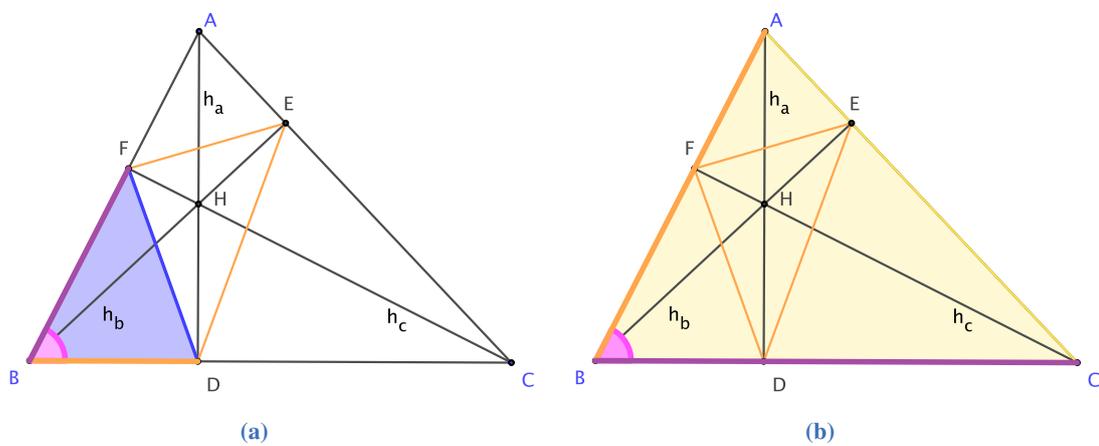
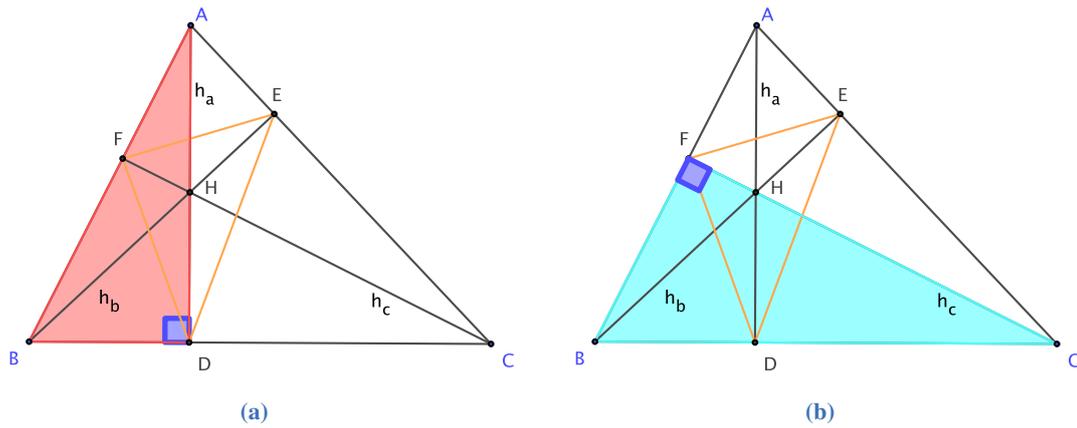
De aquí tenemos que los dos triángulos tienen sus tres ángulos correspondientes iguales, por lo que  $\triangle ABD \approx \triangle CBF$ , luego entonces tenemos que:

$$\frac{DA}{FC} = \frac{DB}{FB} = \frac{AB}{CB} \tag{1}$$

Ahora consideremos los triángulos  $\triangle BDF$  y  $\triangle ABC$ , los cuales comparten el ángulo en  $B$ .

Además, de las igualdades obtenidas en 1 tenemos que  $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{FB}$ , entonces por el criterio de semejanza  $LAL$ , tenemos que  $\triangle DBF \approx \triangle ABC$  que es lo que queríamos demostrar.





Esto implica que los lados semejantes correspondientes son  $AB$  con  $DB$ ,  $CB$  con  $BF$  y  $CA$  con  $FD$ , además los otros ángulos correspondientes son  $\angle FDB = \angle CAB$ ,  $\angle BFD = \angle BCA$ .

De manera análoga, podemos demostrar que los triángulos  $\triangle DEC$  y  $\triangle AEF$  son semejantes entre si y son semejantes al  $\triangle ABC$ .

Por lo tanto  $\triangle DBF$ ,  $\triangle AEF$ ,  $\triangle DEC$  son semejantes al triángulo  $\triangle ABC$ .



**Proposición 0.1**

*La mediana que pasa por un vértice de un triángulo, biseca cualquier paralela al lado opuesto a ese vértice.*

**Demostración**

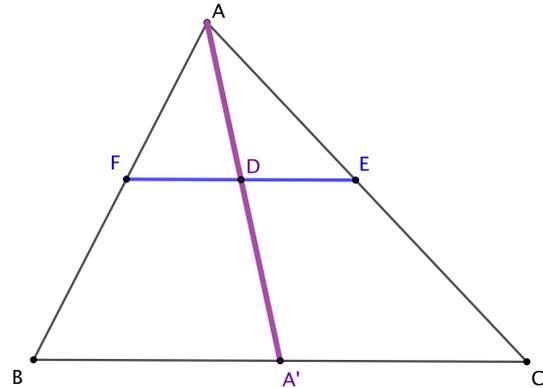
Sea  $ABC$  un triángulo. Tracemos la mediana  $m_a$  tal que pasa por el vértice  $A$  y por el punto medio  $A'$  del lado  $BC$ . Ahora, podemos trazar rectas paralelas al lado  $BC$ , en particular consideremos las rectas paralelas  $FE$  tales que  $F$  y  $E$  están sobre los lados  $AB$  y  $CA$  respectivamente.

Por el teorema de Tales tenemos que los triángulos generados por las paralelas al lado  $BC$  y con vértice  $A$  son semejantes al  $\triangle ABC$  con una proporción  $K$ . Llamemos  $D$  al punto de intersección del segmento  $FE$  con la mediana  $AA'$ .

Luego consideremos los triángulos  $ABA'$  y  $AFD$  los cuales por el criterio de semejanza  $LAL$  también son semejantes, de igual manera tenemos que  $\triangle AA'C \approx \triangle ADE$  por lo que

$$\frac{BA'}{FD} = \frac{A'C}{DE} = K \tag{2}$$

pero  $BA' = A'C$  pues  $A'$  es punto medio de  $BC$  luego  $FD = DE$ . Por tanto, la recta  $AA'$  biseca al segmento  $FE$  en el punto  $D$ . **QED**



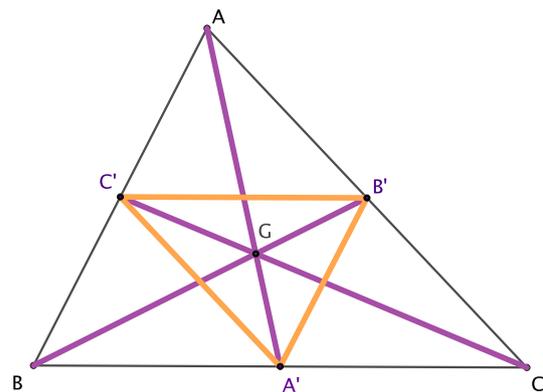
**Corolario 0.1**

*El centroide de un triángulo es también centroide de su triángulo mediano.*

**Demostración**

Sea  $ABC$  un triángulo con triángulo mediano  $\triangle A'B'C'$ , es decir  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son puntos medios de  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente. Sea  $G$  el centroide del triángulo  $\triangle ABC$ , es decir que las medianas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren en  $G$ .

Sabemos que los lados del triángulo  $A'B'C'$  por ser segmentos que unen los puntos medios de los lados del  $\triangle ABC$  son paralelos a los lados de éste último. Luego, por el teorema anterior, las medianas del triángulo  $\triangle ABC$  bisecan a cada uno de los lados del triángulo  $\triangle A'B'C'$  y además pasan por los vértices correspondientes, por lo que  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  también son medianas del  $\triangle A'B'C'$  y concurren en  $G$ . Por tanto  $G$  es centroide de  $\triangle A'B'C'$ .



■



 **Ejercicios para ir pensando** 

1. Sea  $ABC$  un triángulo. Sean  $H$  su ortocentro,  $O$  su circuncentro y  $A'$  el punto medio del lado  $BC$ , ¿qué relación existe entre la longitud de  $AH$  y la de  $A'O$ .
2. ¿Qué se puede decir del incentro, centroide, ortocentro y circuncentro de un triángulo equilátero? Argumenta tu respuesta.
3. Si se tiene un triángulo no equilátero, ¿sucederá lo mismo que en problema anterior? ¿Cómo será la distancia del ortocentro al centroide con respecto de la distancia del centroide al circuncentro?

