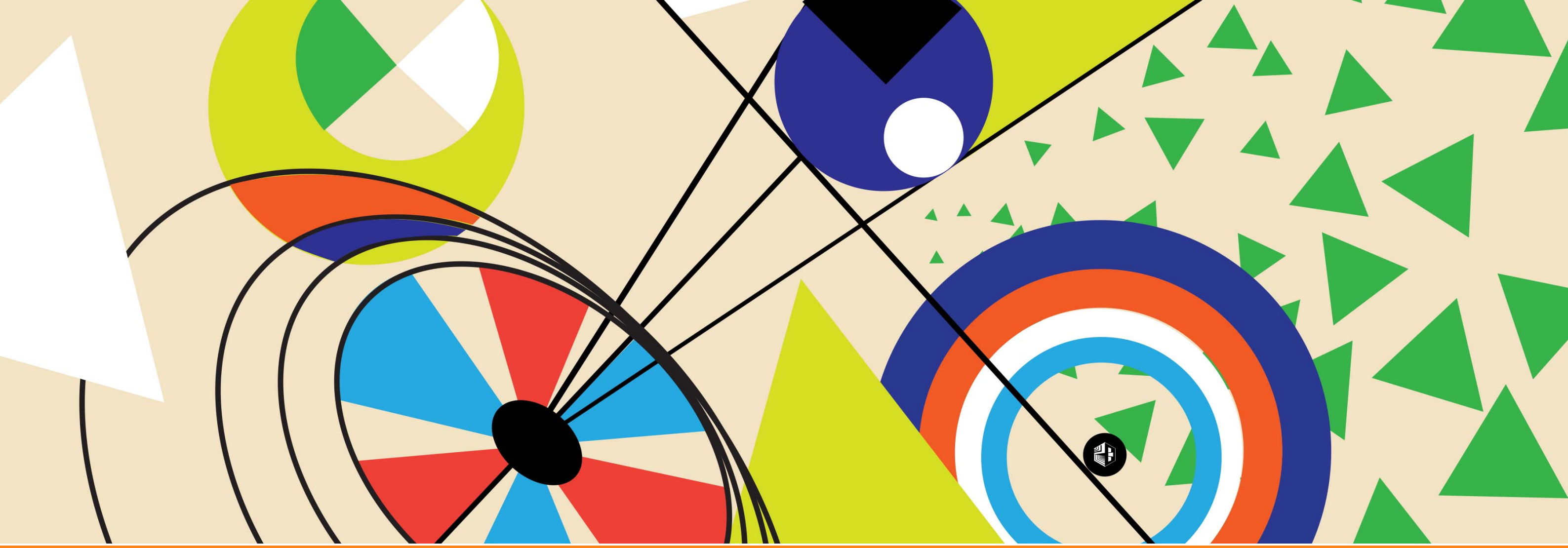


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

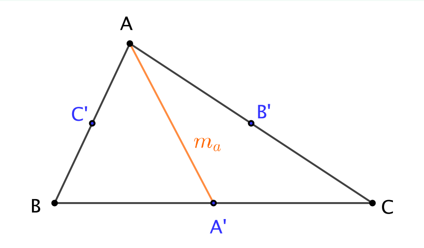
Unidad 1. La geometría del triángulo

Puntos y rectas notables

Medianas

Definición 0.1. Medianas de un triángulo

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente, definimos una ***mediana*** *del triángulo ABC como el segmento trazado a partir de uno de los vértices al punto medio del lado opuesto. Así las medianas serían los segmentos AA', BB' y CC'. También podemos denotar AA' como m_a, esto es la mediana trazada desde el vértice A al punto medio del lado opuesto cuya longitud de este lado mide a.*



♣

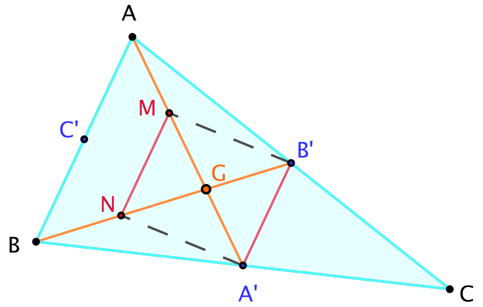
Teorema 0.1

Las medianas de un triángulo concurren en un punto.

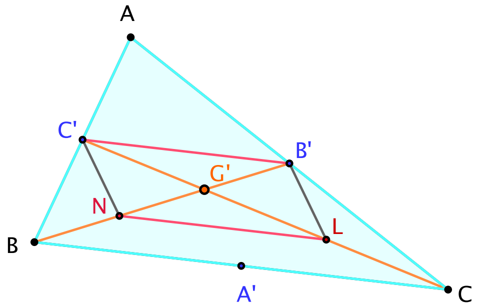
♡

Demostración

Sea ABC un triángulo y A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente. Tracemos las medianas AA' y BB' las cuales se intersecan en un punto G, luego trazamos el segmento $A'B'$, el cual es paralelo a AB y además $A'B' = \dfrac{AB}{2}$, entonces $AB = 2A'B'$.
Luego trazamos los puntos medios de GA y GB, a los cuales llamaremos M y N respectivamente. De igual forma $MN \parallel AB$, entonces $AB = 2MN$, así $MN = A'B'$.



Ahora trazamos los segmentos $B'M$ y $A'N$ los cuales son paralelos y miden lo mismo. Así, tenemos al paralelogramo $MNA'B'$. Sabemos que en un paralelogramo, las diagonales se bisecan, por lo que $B'N$ y $A'M$ se bisecan en el punto G. Esto es $NG = GB'$ y $MG = GA'$.
Además como M y N son puntos medios, tenemos que $AM = MG = GA'$ y $BN = NG = GB'$.



De la misma forma se encuentra el punto de intersección de la tercera mediana CC' con alguna de las otras, sin pérdida de generalidad consideremos a la mediana BB' y llamemos G' al punto de intersección. De lo anterior, tenemos que $BG' = 2G'B'$ y $CG' = 2G'C'$, luego $B'G' = G'N = NB$ y $C'G' = G'L = LC$, con N y L puntos medios de BG' y CG' respectivamente, entonces como G y G' dividen en la misma razón a la mediana BB' tenemos que $G = G'$. Por lo tanto las medianas concurren en G. ■

Definición 0.2

Al punto de concurrencia de las medianas de un triángulo, lo llamamos, ***Baricentro, Centroide, gravicentro o centro de gravedad*** ♣

Lema 0.1

El centroide de un triángulo triseca cada una de las medianas. ♡

Demostración

En el teorema anterior se probó que $AM = MG = GA'$ y $BN = NG = GB'$ y $B'G = GN = NB$, es decir, $BG = 2GB'$, $AG = 2GA'$ y $CG = 2GC'$, lo cual quiere decir que G triseca a las medianas AA', BB' y CC'. ■

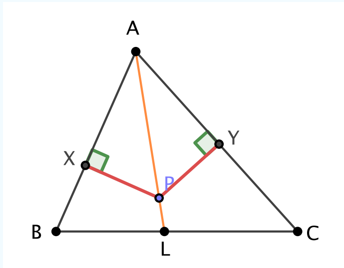
Bisectrices

Definición 0.3. Las bisectrices

Sea ABC un triángulo cualquiera, definimos a la ***bisectriz interna*** *del ángulo interior $\angle BAC$ del triángulo, como el segmento de recta que parte del vértice A y divide a $\angle BAC$ en dos ángulos iguales.* ♣

Proposición 0.1

Sea ABC un triángulo cualquiera y sea l la bisectriz por A que divide al ángulo interior ABC del triángulo; entonces un punto P está en la bisectriz si y sólo si P equidista de cada lado del ángulo, es decir, si X y Y son pies de perpendicular de P sobre AB y AC respectivamente, entonces $PX = PY$.



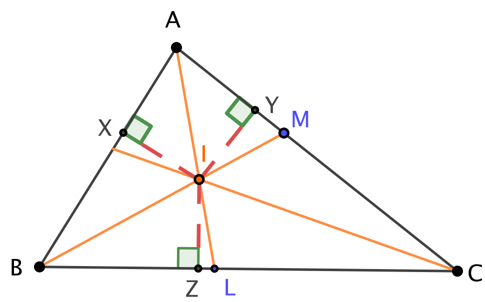
♠

Teorema 0.2

Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes. ♡

Demostración

Sea ABC un triángulo y sean AL y BM las bisectrices internas del $\angle BAC$ y $\angle CBA$ respectivamente.
Llamamos I al punto de intersección de las bisectrices. Ahora trazamos las perpendiculares a AB y AC que pasan por I, a los pies de éstas los llamamos X y Y respectivamente. Por la proposición anterior tenemos que $IX = IY$.



Análogamente tenemos las perpendiculares de AB y BC, con pies de las perpendiculares X y Z respectivamente, así $IX = IZ$, en consecuencia $IX = IY = IZ$, por tanto $IY = IZ$. Por el regreso de la proposición anterior tenemos que la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ pasa por I.
Por lo tanto, las bisectrices del triángulo son concurrentes. ■

Definición 0.4

Al punto I donde concurren las bisectrices internas del triángulo se le llama ***incentro.*** ♣

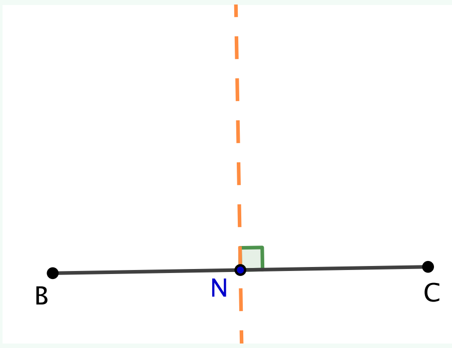
Observación

Dado que los pies de las perpendiculares sobre los lados del triángulo que pasan por el incentro son equidistantes al incentro, entonces se puede trazar una circunferencia con centro en el incentro y radio igual a la distancia del incentro a uno de los pies de las perpendiculares, la cual pasará por los tres pies. A esta circunferencia se le llama **incírculo**.

Mediatrices

Definición 0.5

*La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular que lo biseca, es decir, pasa por su punto medio.*



♣

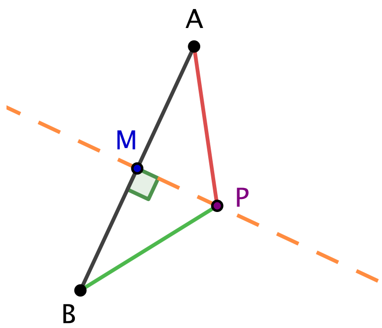
Proposición 0.2

Un punto P esta en la mediatriz de un segmento AB si y sólo si la distancia de P a cada extremo A, B es la misma, es decir $PA = PB$.

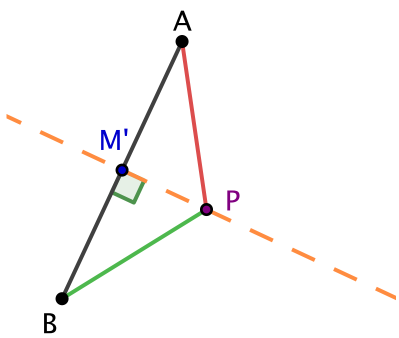
♠

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea M el punto medio del segemnto AB y P un punto que se encuentra en la mediatriz de AB. Trazamos los segmentos PA y PB, entonces tenemos al $\triangle PAM$ y $\triangle PMB$, ambos triángulos rectángulos, los cuales son congruentes por LAL ya que $AM = MB$, comparten PM y el ángulo recto tiene como lados adyacentes a los lados mencionados.
$\therefore PA = PB$



($\Longleftarrow$) Ahora, si P es un punto que satisface $PA = PB$, entonces P está sobre la mediatriz de AB.
En efecto, sea M' el pie de la perpendicular por P sobre el segmento AB. Queremos ver que $M = M'$ donde M es el punto medio del segmento AB.
Consideremos los triángulos PAM' y $PM'B$, por hipótesis $PA = PB$, además PM' es común. Utilizando el teorema de Pitagóras aplicado a los dos triángulos rectángulos concluimos que $AM' = M'B$, es decir M' es punto medio.
$\therefore M' = M$



■

Teorema 0.3

Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. ♡

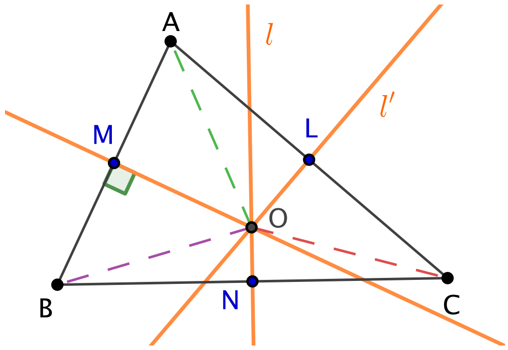
Demostración

Sea el $\triangle ABC$ y sean l y l' las mediatrices de los segmentos BC y CA respectivamente. Sea O el punto de intersección de estas mediatrices. P.d que O se encuentra en la mediatriz del segmento AB.

Como O está en l entonces por la proposición anterior $OB = OC$ y como O se encuentra en l', entonces $OA = OC$, luego $OA = OB$.

Por lo que O está en la mediatriz de AB.

Por tanto, las tres mediatrices son concurrentes. ■



Definición 0.6

Al punto de concurrencia de las tres mediatrices se llama ***circuncentro.*** ♣

Observación

Ya que los vértices son equidistantes con respecto al circuncentro, la circunferencia con centro en O y radio igual a la distancia del circuncentro a uno de los vértices del triángulo se llama **circuncírculo** del triángulo ABC y el radio se llama **circunradio.**

Alturas

Teorema 0.4

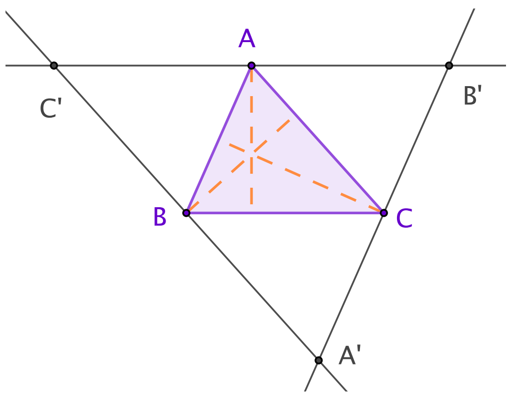
Las alturas de un triángulo son concurrentes. ♡

Demostración

Sea ABC un triángulo.

Por cada vértice del triángulo trazamos una recta paralela al lado opuesto de dicho vértice. Así tenemos las rectas paralelas $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$, trazadas por los vértices A, B y C respectivamente.

Así, tenemos el triángulo $A'B'C'$. Por construcción $ABCB'$, $AC'BC$ y $ABA'C$ son paralelogramos. Luego A, B y C son puntos medios de $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ respectivamente. Además las alturas del $\triangle ABC$ son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ y estas sabemos que son concurrentes por el teorema anterior.



$\therefore$ Las alturas de $\triangle ABC$ son concurrentes. ■

Ejercicios para ir pensando

1. Demostrar la proposición 0.1 de estas notas: Sea ABC un triángulo cualquiera y sea l la bisectriz por A que divide al ángulo interior ABC del triángulo; entonces un punto P está en la bisectriz si y sólo si P equidista de cada lado del ángulo, es decir, si X y Y son pies de perpendicular de P sobre AB y AC respectivamente, entonces $PX = PY$.
2. Dado un triángulo $\triangle ABC$ y L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, entonces los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ son semejantes y LM es paralela a AB, MN a BC y NL a CA. Encuentra la razón de proporcionalidad entre $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$.
3. El radio del circuncírculo de un $\triangle ABC$ es el doble del radio del circuncírculo del $\triangle LMN$, donde L, M y N son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo.