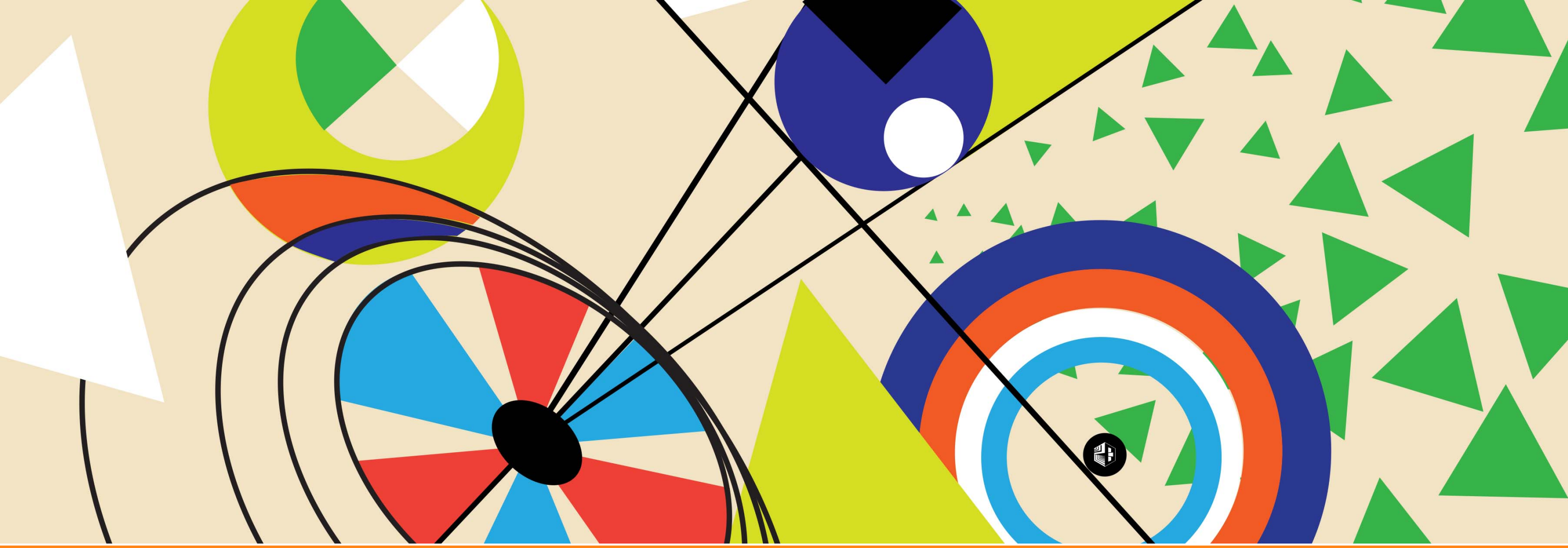


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

Unidad 1. La geometría del triángulo

Congruencia de triángulos

Definición 0.1

Se dice que dos figuras son **congruentes** *si tienen su forma y tamaño iguales, esto es, si tienen sus lados y ángulos correspondientes de la misma magnitud. A los ángulos y lados correspondientes también se les llama homólogos.*

Notación: $A \cong B$ *(A es congruente con B)*

Criterios de congruencia en triángulos

Cuando queremos saber si dos triángulos son congruentes es necesario comparar 6 elementos: los tres lados y los tres ángulos de cada par de triángulos. Sin embargo, veremos que los criterios de congruencia nos proporcionan herramientas que facilitan la comparación de los elementos de dos triángulos para así poder afirmar si son o no congruentes.

Proposición. I.4 (Criterio 1. LAL)

Si dos triángulos tienen dos de sus lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le denota como criterio LAL.

Hipótesis: Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, y $\angle BAC = \angle B'A'C'$.
Tesis: Queremos demostrar que $BC = B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

Demostración La demostración la haremos por el método de superposición, es decir, sobreponiendo los objetos.
Si el $\triangle ABC$ es superpuesto sobre el $\triangle A'B'C'$, de tal manera que el punto A es colocado encima del punto A' y el lado AB sobre el lado $A'B'$, se tiene que, como $AB = A'B'$, B debe coincidir con B.
Luego, como AB coincide con $A'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$, el lado AC debe coincidir con $A'C'$, y como $AC = A'C'$, entonces el punto C coincide con el punto C'. Pero, ya se vió que B coincide con B', luego el segmento BC coincide con el lado $B'C'$, entonces sus longitudes son iguales.
Por lo tanto, el $\triangle ABC$ coincide con el $\triangle A'B'C'$, así por la NC.4 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ y los ángulos restantes coinciden con sus homólogos restantes en el $\triangle A'B'C'$.
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

Antes de demostrar el segundo criterio de congruencia para triángulos demostraremos la proposición I.5 que nos servirá para la demostración de otros resultados y de dicho criterio.

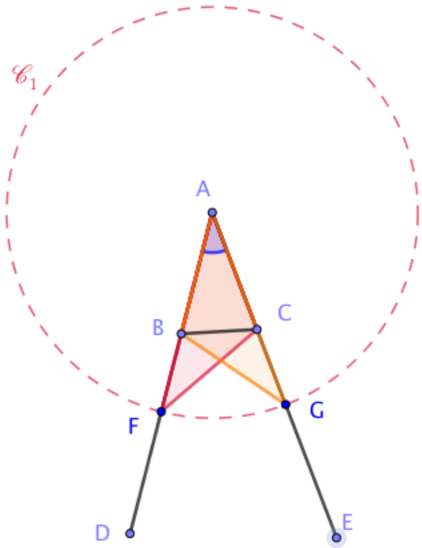
Proposición. I.5.

En todo triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales y si los lados se prolongan, los ángulos por debajo de la base son iguales entre ellos.

Hipótesis: Sea el $\triangle ABC$ isósceles tal que $AB = AC$.
Tesis: Queremos demostrar que $\angle CBA = \angle ACB$ y $\angle FBC = \angle BCG$, con F y G puntos construidos en la prolongación de los lados AB y AC respectivamente.

Demostración

Sea AD la prolongación del lado AB y AE la prolongación del lado AC. Sea F un punto sobre AD, trazamos una circunferencia $\mathscr{C}_1$ con centro en A y radio AF, luego llamamos G a la intersección de $\mathscr{C}_1$ con AE.
Consideremos los $\triangle AFC$ y $\triangle GAB$, afirmamos que estos son congruentes pues:



$AC = AB$	Por hipótesis
$\angle FAC = \angle BAG$	Pues comparten el ángulo
$AF = AG$	Por ser radios de $\mathscr{C}_1$

Entonces por el criterio de congruencia LAL, $\triangle AFC \cong \triangle GAB$. De donde,

$$\angle CFA = \angle AGB ...(1), \quad \angle ACF = \angle GBA ...(2) \quad \text{y } FC = BG ...(3).$$

Además, por NC.3 tenemos que $BF = CG$.
Consideremos ahora el $\triangle BFC$ y el $\triangle GCB$, en los cuales se tiene:

$CB = CB$	Pues ambos comparten ese lado
$\angle CFB = \angle CGB$	Por la igualdad (1)
$FC = BG$	Por la igualdad (3)

De esto y por el criterio de congruencia LAL, se sigue que $\triangle BFC \cong \triangle GCB$, luego

$$\angle FBC = \angle BCG ...(4), \ \angle BCF = \angle GBC ...(5).$$

Por otra parte, tenemos que $\angle GBA = \angle GBC + \angle CBA$ y $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF$, entonces por la igualdad (2) se sigue que $\angle GBA = \angle GBC + \angle CBA = \angle ACB + \angle BCF = \angle ACF$.
Luego por (5) y por NC.3, $\angle CBA = \angle ACB$.
Por tanto, $\angle CBA = \angle ACB$ (ángulos de la base) y $\angle FBC = \angle BCG$ (ángulos por debajo de la base) ■

Ejercicios para ir pensando

1. Demuestra que si en un triángulo dos ángulos son iguales entre sí, los lados subtendidos por tales ángulos son también iguales entre sí. (Proposición I.6)
2. Demuestra que dos segmentos respectivamente iguales a otros dos segmentos con los mismos extremos en el mismo lado de un segmento, no se juntan en dos puntos distintos. (Proposición I.7)

Proposición. I.7.

Dos segmentos respectivamente iguales a otros dos segmentos con los mismos extremos en el mismo lado de un segmento, no se juntan en dos puntos distintos.

Hipótesis: Sea AB un segmento y sean AC y BC dos segmentos que se levantan sobre AB y que se juntan en el punto C.
Tesis: Queremos demostrar que no es posible levantar del mismo lado sobre AB otros dos segmentos iguales a AC y BC respectivamente y que se junten en un punto D distinto de C.

Demostración Puedes revisar la Demostración interactiva en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/jmbweprn.

Proposición. I.8 (Criterio 2)

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le denota como criterio LLL.

Hipótesis: Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ triángulos tales que $AB = DE$, $BC = EF$ y $AC = DF$.
Tesis: Queremos demostrar que $\triangle ABC = \triangle DEF$, es decir, falta probar que $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ y $\angle BAC = \angle EDF$.

Demostración

La demostración la haremos por superposición, sobrepondremos el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle DEF$.
Superponemos el vértices A sobre el punto D y el lado AC sobre el lado DF, entonces como $AC = DF$ (por hipótesis), se tiene que el vértice C coincide con F.
Ahora, no puede suceder que AB no coincida con DE y que BC no coincida con EF, pues si fuera así tendríamos que hay dos segmentos, DG y FG, construidos sobre el segmento DF y que están del mismo lado que los segmentos DE y DF, de igual longitud y con un extremo distinto. Lo cual por la proposición I.7 no es posible.
Así AB coincide con DE y BC coincide con EF, luego los ángulos coinciden respectivamente.
Por lo que, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BAC = \angle EDF$ y $\angle BCA = \angle EFD$.
Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ■

Proposición. I.26 (Criterio 3)

Si dos triángulos tienen dos de sus ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado del otro, a saber el lado adyacente a los ángulos iguales, o el lado opuesto a estos, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración

La demostración se deja como actividad para el alumno.

A continuación se presentan algunos problemas en los que se busca determinar la distancia desde un punto accesible hacia un punto innaccesible pero visible, es decir, que no se puede llegar (tocar) dicho punto pero sí se puede ver. Este tipo de problemas tienen su origen con el estudio de ciertos problemas de astronomía.

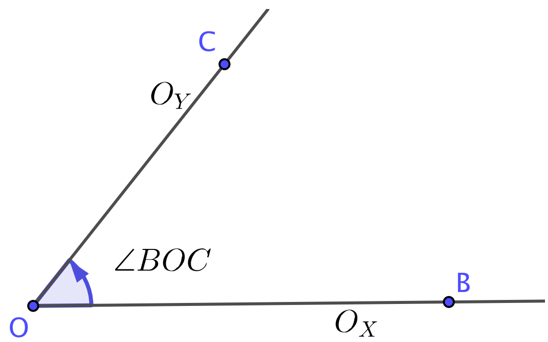
Ejercicios para ir pensando

1. Describe y justifica una forma para calcular la distancia desde un punto en la playa hacia un barco que se encuentra en el mar.
2. Encuentra la distancia entre dos casas que están separadas por un lago que impide la medición directa.

Algunas propiedades del triángulo

Ángulos

Como se dijo al inicio del curso, un ángulo es la parte común de dos semiplanos, el borde del ángulo lo forman los rayos O_X y O_Y con un punto inicial común O. A este punto le llamamos vértice y a los rayos, lados del ángulo. Si consideramos un punto B sobre el rayo O_X y un punto C sobre el rayo O_Y podemos denotar al ángulo formado por estos como el $\angle BOC$.



Observemos que por convención el “recorrido” de un lado a otro se hace en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

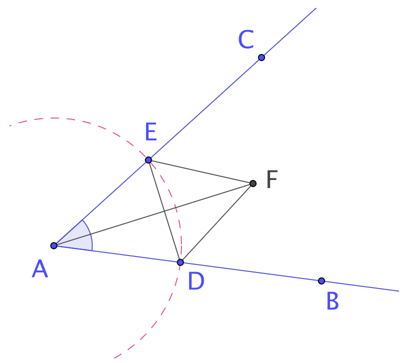
A continuación estudiaremos algunos resultados relativos a ángulos.

Proposición. I.9

Es posible bisecar un ángulo dado.

Demostración

Sea $\angle BAC$ un ángulo cualquiera.



Consideremos un punto cualquiera, D, sobre el segmento AB. Trazamos la circunferencia con centro en A y radio AD. Llamemos E a la intersección de la circunferencia con AC, de donde $AE = AD$.

Tracemos el segmento DE (por P.1). Luego, por la proposición I.1 podemos trazar el triángulo equilátero EDF. Trazamos el segmento AF. Afirmamos que el $\angle BAC$ es bisecado por AF.

Esta última afirmación es cierta pues en los $\triangle AEF$ y $\triangle ADF$ se tiene que $AE = AD$, $EF = FD$ y AF es lado común, así, por el criterio de congruencia LLL, los triángulos son congruentes.

Por tanto $\angle FAE = \angle DAF$ y $\angle DAE = \angle FAE + \angle DAF$.

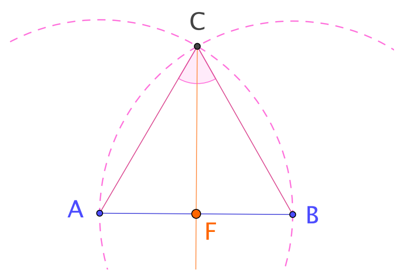
Por tanto hemos bisecado al $\angle BAC$. ■

Proposición. I.10

Es posible bisecar un segmento dado.

Demostración

Sea AB un segmento dado.



Por la proposición I.1 podemos trazar el triángulo equilátero con lado AB.

Por la proposición I.9 podemos bisecar el $\angle ACB$.

Luego, consideramos el $\triangle FCA$ y el $\triangle BCF$, los cuales afirmamos son congruentes por el criterio de congruencia LAL.

Por lo que $AF = FB$ y $AB = AF + FB$.

Por tanto, F es el punto medio de AB, así hemos bisecado al segmento dado. ■

Ejercicios para ir pensando

1. Dada una recta m y un punto P cualquiera del plano, construir una recta perpendicular a m que pase por P. Considera los diferentes casos:
   (a). Si P está en la recta m.
   (b). Si P está fuera de la recta m.

2. Dado un ángulo α y un segmento de recta PQ, construir un ángulo igual a α que tenga como vértice a P y como uno de sus lados a PQ.
3. Si una recta es levantada sobre otra, ¿cómo son los ángulos formados por ellas?
4. Si dos segmentos se cortan entre sí, ¿cómo es la medida de los ángulos opuestos por el vértice?
5. Demuestra que si dos ángulos adyacentes suman dos ángulos rectos, los lados no adyacentes de los ángulos son colineales
6. En un triángulo cualquiera, si se prolonga alguno de los lados, ¿cómo es el ángulo exterior en comparación con cualquiera de los ángulos internos y opuestos a él?
7. Demuestra que en un triángulo, al lado mayor de cualesquiera dos lados se opone el ángulo mayor, i.e., si $AB > AC$ entonces $\angle ACB > \angle ABC$. Recíprocamente si dos ángulos internos cualesquiera son desiguales, los lados opuestos a estos son desiguales y conservan la desigualdad.
8. ¿Cómo es la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo con relación al tercer lado?