Rotación de ejes

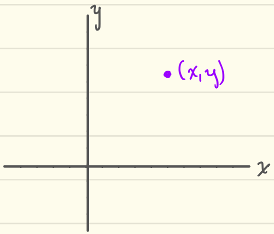
* ¿Qué es?
* Hacer las cuentas. Fórmula
* Ejemplos

Arilin's Math World

Rotación de ejes

Cambio de variables

Empecemos con un plano cartesiano x, y,



pensemos que hay algo en el plano cartesiano que parece "inclinado" y lo queremos acomodar derecho pero sin que pierda su forma.

¿Qué debemos hacer?

La respuesta es: Una rotación.

¿Pero cómo?

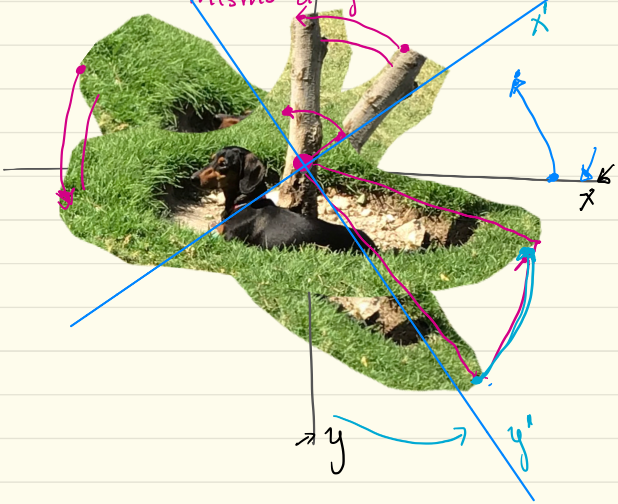
Será quizá con un cambio de coordenadas.

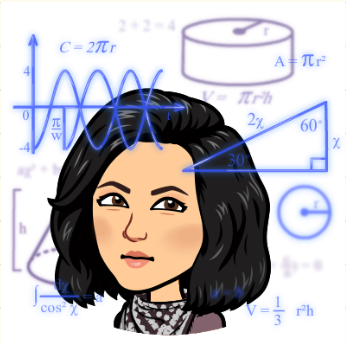
Sí.

¿Cuál?

¡Vamos a ver!

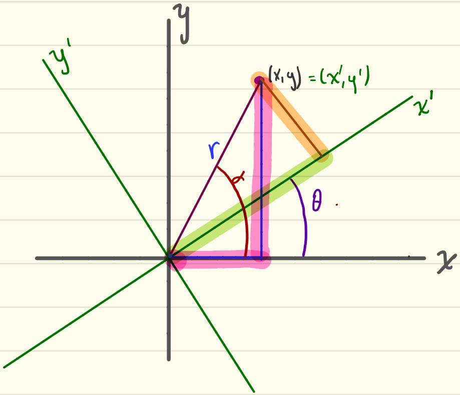
* Conserva la distancia del origen.
* todo se mueve en una misma dirección y con el mismo ángulo





Rotación de ejes Cambio de variables

Hacer las cuentas



$x = r\cos\alpha$

$y = r\,\mathrm{Sen}\,\alpha$

Donde α es el ángulo entre el eje x original y el segmento que une al origen con el punto $p=(x,y)$

$$x' = r\cos(\alpha-\theta) \overset{\text{usar identidad}}{=} r\left(\cos\alpha\cos\theta + \mathrm{Sen}\,\alpha\,\mathrm{Sen}\,\theta\right)$$
$$= \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\cos\theta + \underbrace{r\,\mathrm{Sen}\,\alpha}_{y}\,\mathrm{Sen}\,\theta$$
$$= x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$y' = r\,\mathrm{Sen}(\alpha-\theta) \overset{\text{usar identidad}}{=} r\left(\mathrm{Sen}\,\alpha\cos\theta - \cos\alpha\,\mathrm{Sen}\,\theta\right)$$
$$= \underbrace{r\,\mathrm{Sen}\,\alpha}_{y}\cos\theta - \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\,\mathrm{Sen}\,\theta$$
$$= y\cos\theta - x\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

Identidades trigonométricas

que vamos a usar

→ $\sin(\alpha-\theta) = \sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta)$

→ $\cos(\alpha-\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta)$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$

$y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{Sen}\,\theta$

Donde θ es el ángulo por el que estamos rotando

Ejemplo

Dar la ecuación de la parábola con directriz y=-3 y foco en (0,3) después de rotarla 90 grados.

$$x^2 = 4y(3) \rightarrow \boxed{x^2 = 12y}$$

Ecuación en el plano original

Ecuación para el plano rotado $\rightarrow$ $\boxed{x'^2 = 12y'}$

$\theta = 90$

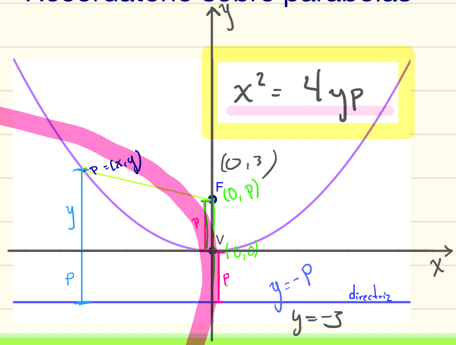
$$(x\,\mathrm{Cos}\,90 + y\,\mathrm{Sen}\,90)^2 = 12(y\,\mathrm{Cos}\,90 - x\,\mathrm{Sen}\,90)$$

$$(x(0) + y(1))^2 = 12(y(0) - x(1))$$

$$y^2 = 12(-x) = -12x$$

$$\boxed{y^2 = -12x}$$

Recordatorio sobre parábolas



Recordatorio de cambio de variable para rotación

$x' = x\,\mathrm{Cos}\,\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$ $y' = y\,\mathrm{Cos}\,\theta - x\,\mathrm{Sen}\,\theta$	Donde θ es el ángulo por el que estamos rotando

Ejercicios

1

Rotar 45° la parábola

Tú 17:42
vértice (3,2) y foco en (3,4)

rotar 45°

Tú 17:44
(x-h)^2=4p(h-k)

Tú 17:45
(x-3)^2=4(2)(y-2)

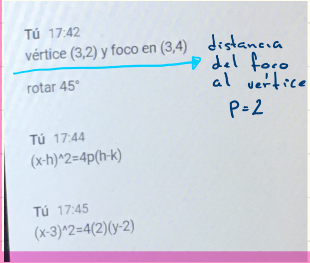
2

Rotar 60° la cónica

$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$

Soluciones →

Rotar 45° la parábola



Ejercicio / Ejemplo

Paso 1 Encontrar la ecuación de esta parábola

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ →

$(x-3)^2 = 4(2)(y-2)$

Paso 2. Recordar y hacer las cuentas para el cambio de variables.

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta = x\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta = y\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - x\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$$

Paso 3. Sustituir en la ecuación los valores de x' y y' obtenidos en el cambio de variable, hacer las cuentas y simplificar

$(x-3)^2 = 4(2)(y-2) = 8(y-2)$ ← parábola en el plano original

$(x'-3)^2 = 4(2)(y'-2) = 8(y'-2)$ ← parábola en el plano rotado

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - 3\right)^2 = 8\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x) - 2\right)$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)}_{x'^2} - \underbrace{\tfrac{6}{\sqrt{2}}(x+y)}_{2(3)x'} + \underbrace{9}_{3^2} = 8\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x) - 2\right) = \tfrac{8}{\sqrt{2}}y - \tfrac{8}{\sqrt{2}}x - 16$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + xy + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{6}{\sqrt{2}}x - \tfrac{6}{\sqrt{2}}y + 9 = \tfrac{8}{\sqrt{2}}y - \tfrac{8}{\sqrt{2}}x - 16$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}x^2 + xy + \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{2}{\sqrt{2}}x - \tfrac{14}{\sqrt{2}}y + 25 = 0}$$

Ejercicio

Rotar 60° la cónica

$(x+1)^2 - y^2 = 1$

Supongamos que los nuevos ejes x' y y' están rotados 60°, entonces la ecuación $(x'+1)^2 - y'^2 = 1$ representa la cónica que buscamos. ¡Hagamos las cuentas!

Preparo mi cambio de variables en el nuevo plano

$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$ $y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{Sen}\,\theta$	Donde θ es el ángulo por el que estamos rotando

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta = x\left(\tfrac{1}{2}\right) + y\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\,y\right)$$
$$y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{Sen}\,\theta = y\left(\tfrac{1}{2}\right) - x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(y - \sqrt{3}\,x\right)$$

$$(x'+1)^2 - y'^2 = 1$$
$$\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}\,y)}_{\text{al cuadrado}} + 1\Big)^2 - \Big(\tfrac{1}{2}\big(y - \sqrt{3}\,x\big)\Big)^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2\right) + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x + \sqrt{3}\,y\right) + 1 - \tfrac{1}{4}\left(y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3x^2\right) = 1$$
$$\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}xy + \tfrac{3}{4}y^2 + x + \sqrt{3}\,y + \cancel{1} - \tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}xy - \tfrac{3}{4}x^2 = \cancel{1}$$
$$-\tfrac{2}{4}x^2 + \sqrt{3}\,xy + \tfrac{2}{4}y^2 + x + \sqrt{3}\,y = 0$$

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.