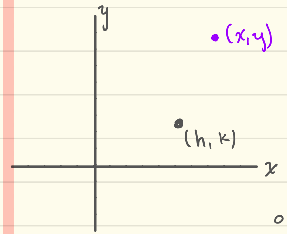
Traslaciones

Arilin's Math World

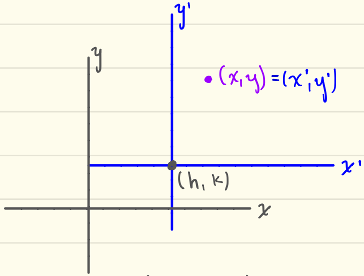
Traslación de ejes.

1

Empecemos con un plano cartesiano x, y y pensemos que de pronto sentimos la necesidad de que el origen cambié de lugar. Digamos por ejemplo que ahora queremos que el origen quede en el punto (h, k).



2



Entonces cada punto (x, y) en el plano original xy tendrá nuevas coordenadas (x', y') que se correspondan con los nuevos ejes $x'y'$.

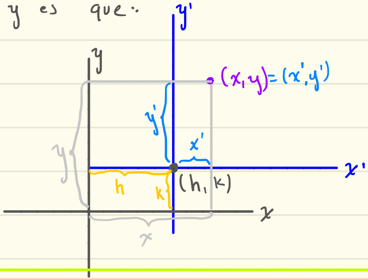
3

Notemos que hay una relación entre las coordenadas (x, y) y las coordenadas (x', y') y es que:

$x = h + x'$ y $y = k + y'$

o bien

$x' = x - h$ y $y' = y - k$

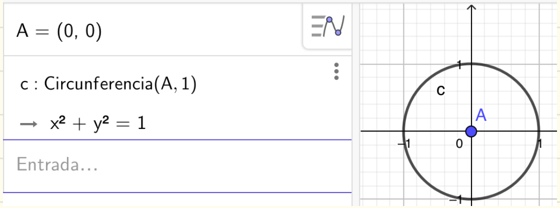


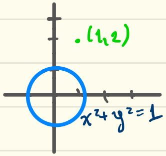
Traslación de ejes.

Ejemplo:

Sabemos que la ecuación $x^2+y^2=1$ es una circunferencia con centro en el origen.

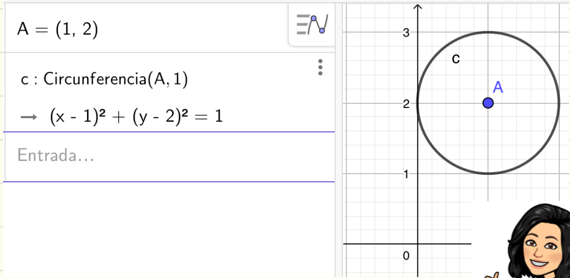
¿Qué debo hacer para moverla al punto $(1,2)$?



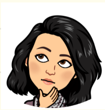


Aquí tengo las variables originales. Como quiero cambiar el origen de lugar al $(\underset{h}{1},\underset{k}{2})$ voy a ultilizar el cambio de variables sugerido anteriormente.

$$x' = x-h = x-1 \quad y \quad y' = y-k = y-2.$$



Así la ecuación $x'^2+y'^2=1$ deberá representar una circunferencia de radio 1 con centro en $(h,k)=(1,2)$.



Vamos a ver:

$x'^2+y'^2=1$ es lo mismo que

$(x-h)^2+(y-k)^2=1$ en este caso

$(x-1)^2+(y-2)^2=1.$

Trasladar la elipse

Ecuación de la elipse con centro en el origen

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

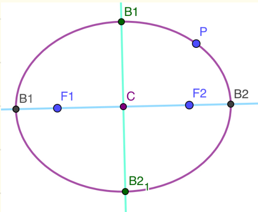
$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

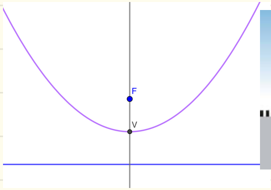
Ecuación de la elipse con centro en (h,k).

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



Trasladar la parábola



Ecuación de la parábola con vértice en el origen.

Ecuación de la parábola con vértice en (h,k).

$$\boxed{x^2 = 4yp}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}}$$

$$x'^2 = 4yp$$

$$\boxed{(x-h)^2 = 4(y-k)p}$$

Trasladar la hipérbola

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

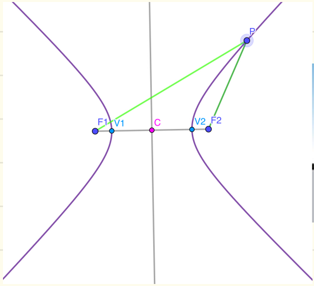
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}}$$

Ecuación de la hipérbola con centro en (h,k).

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



Ejercicio.
Identifica que cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones, calcula sus elementos y dibuja su gráfica.

1. $x^2 - 6x - \frac{y^2}{9} - \frac{10y}{9} + \frac{47}{9} = 0$

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{x}{2} + \frac{2y}{9} - \frac{23}{36} = 0$

3. $x^2 + 2x - 8y + 9 = 0$

Identifica que cónica representa la ecuación, calcula sus elementos y dibuja su gráfica.

(1) $x^2-6x-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}+\frac{47}{9}=0$

Como ambas variables tienen término cuadrático con signo diferente la cónica deberá ser una hipérbola.

Entonces queremos llegar a una ecuación de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$

Primero hay que completar el trinomio cuadrado perfecto

con $x^2-\underset{\text{mitad}}{6x}+9=(x-3)^2$ → $x^2-6=(x-3)^2-9$

$x^2-6x-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}+\frac{47}{9}=0$ → $(x-3)^2-9-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}+\frac{47}{9}=0$

Ahora completamos $-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}=-\frac{1}{9}\left(y^2+10y\right)$

$y^2+10y+25=(y+5)^2$ → $y^2+10y=(y+5)^2-25$

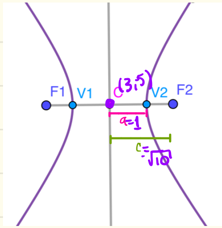
→ $-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}=-\frac{(y+5)^2}{9}+\frac{25}{9}$

$(x-3)^2-9-\frac{y^2}{9}-\frac{10y}{9}+\frac{47}{9}=0$ → $(x-3)^2-9-\frac{(y+5)^2}{9}+\frac{25}{9}+\frac{47}{9}=0$

$(x-3)^2-\frac{(y+5)^2}{9}-9+\underbrace{\frac{25}{9}+\frac{47}{9}}_{\frac{72}{9}=8}=0$ → $(x-3)^2-\frac{(y+5)^2}{9}-1=0$

→ $\boxed{\frac{(x-3)^2}{1^2}-\frac{(y-(-5))^2}{3^2}=1}$

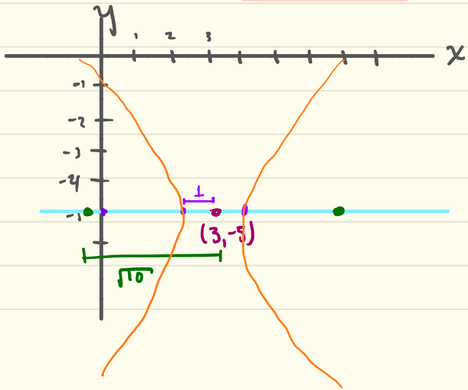
$\boxed{\text{Centro } (h,k)=(3,-5) \quad a=1,\ b=3}$



Por lo tanto $c^2-a^2=b^2$ para algún $b\in\mathbb{R}$

→ $c^2=b^2+a^2=3^2+1^2=10$

→ $\boxed{c=\sqrt{10}\approx 3.16}$



Identifica que cónica representa la ecuación, calcula sus elementos y dibuja su gráfica.

(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{x}{2} + \frac{2y}{9} - \frac{23}{36} = 0$

Tenemos ambas variables con termino cuadrático del mismo signo pero diferente coeficiente → Esta cónica es una elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$a=2$, $b=3$ centro $(-1,-1)$

$c^2 = b^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 9-4 = 5$

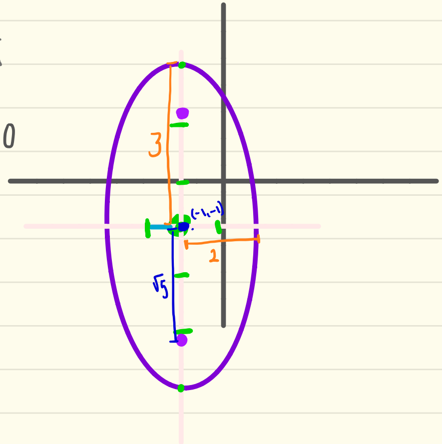
$\rightarrow c = \sqrt{5} \approx 2.23$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{9} + \frac{2y}{9} - \frac{23}{36} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x\right) = \frac{1}{4}\left(x + 2x + 1 - 1\right) = \frac{1}{4}\left((x+1)^2 - 1\right) = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{2y}{9} = \frac{1}{9}\left(y^2 + 2y\right) = \frac{1}{9}\left(y^2 + 2y + 1 + 1\right) = \frac{1}{9}\left((y+1)^2 - 1\right) = \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{9} + \frac{2y}{9} - \frac{23}{36} = 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{1}{9} - \frac{23}{36} = 0$$

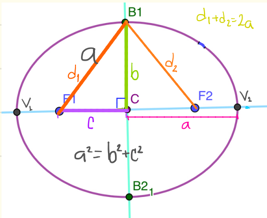


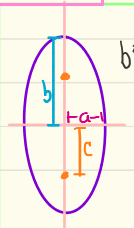
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{23}{36} = 1$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$

$\frac{23}{36} + \frac{13}{36} = \frac{36}{36} = 1$

$$\rightarrow \boxed{\frac{(x-(-1))^2}{2^2} + \frac{(y-(-1))^2}{3^2} = 1}$$





$b^2 = a^2 + c^2$

$c^2 = b^2 - a^2$

Identifica que cónica representa la ecuación, calcula sus elementos y dibuja su gráfica.

3) $x^2+2x-8y+9=0$

Como no hay término cuadrático en las "y" debe ser la ecuación de una parábola

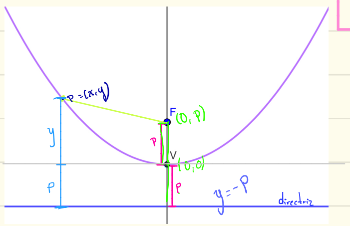
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

$$x^2+2x-8y+9=0$$

$$x^2+2x = x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$$

$$x^2+2x-8y+9=0 \Rightarrow (x+1)^2-1-8y+9=0$$

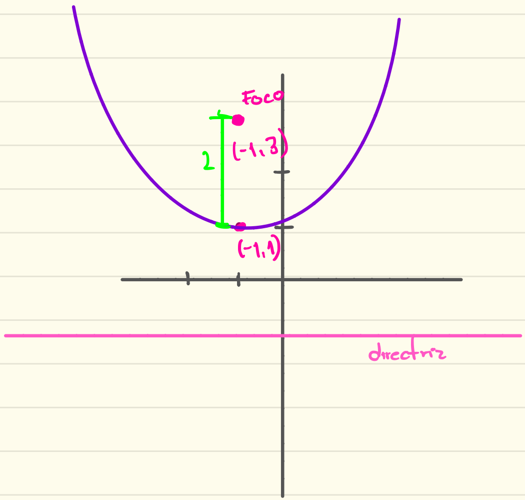
$$(x+1)^2=8y-8=8(y-1)$$



$$\boxed{(x-(-1))^2=4(2)(y-1)}$$

Vértice (-1, 1)

p=2



- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World
- Recuerda visitar mi canal Arilin's Math y mi grupo de Facebook Arilin's Math World.