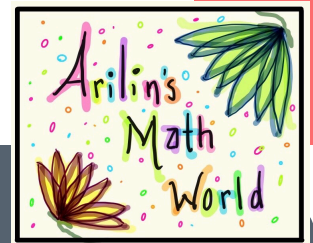


Temas de planos

- * Distancia entre un plano y un punto
- * Distancia entre dos planos
- * Semiespacios



Distancia entre un plano y un punto



**Vamos a
preparar una
~~receta~~
fórmula**

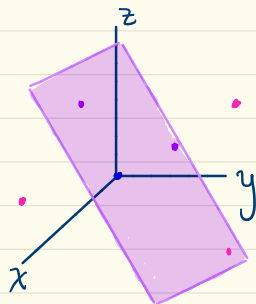
Ingredientes

- Un plano W
- Un punto P

Comentarios:

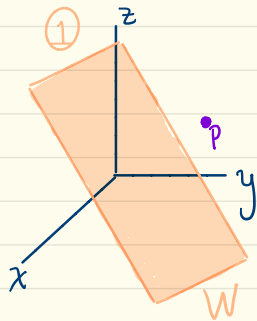
* Si el punto pertenece al plano entonces $d_{W,P} = 0$

* Si el punto no pertenece al plano ...
continuar leyendo.

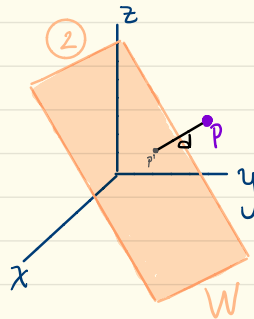


Distancia entre un plano y un punto

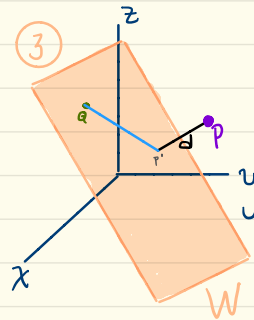
Pensemos $P = (x_p, y_p, z_p)$ y $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0 \}$
Sabemos que $d_{W,P}$ es la longitud del segmento más corto que va de P a W . También sabemos que ese segmento es perpendicular (normal) al plano W . Dicho esto ¡Calculemos esa distancia!



Ubicamos el punto P y el plano W

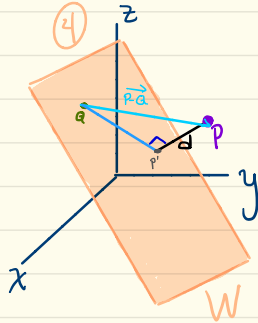


Trazamos la distancia d entre el punto P y el plano W
Que va de P a un punto P' en W

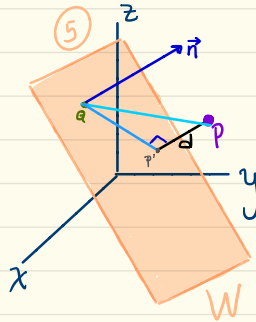


Ubicamos un punto Q en el plano W

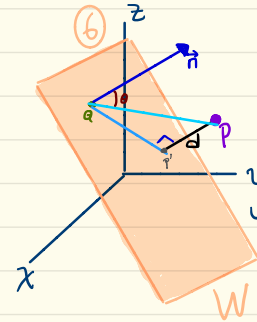
Distancia entre un plano y un punto



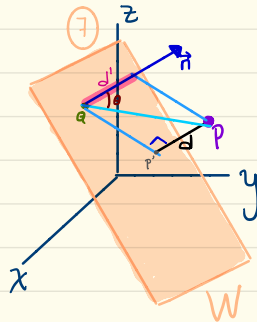
Trazamos el segmento de P a Q .
Visto como vector sería $\vec{PQ}$



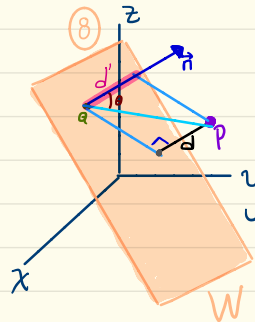
Posicionamos al vector $\vec{n}$ que
es normal al plano W en Q .



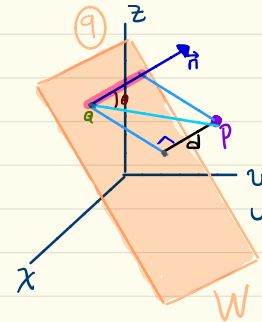
Definimos θ como el ángulo entre
 $\vec{n}$ y $\vec{PQ}$



Formamos un paralelogramo con
 d y $\overline{QP'}$

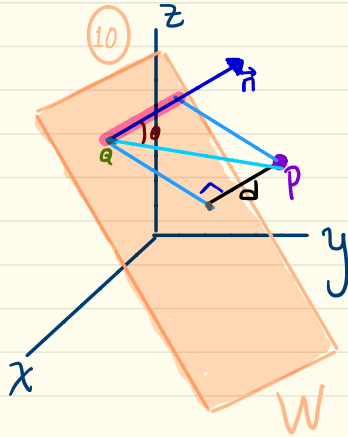


Calculamos la longitud de d' , el
lado paralelo a d pues su longitud es $d_{P,W}$



$d' = \|PQ\| \cos \theta$
Ahora hacemos las cuentas $\rightarrow$

Distancia entre un plano y un punto



$$d = d' = \|P - Q\| \cos \theta$$

Recordo la propiedad del producto punto que dice:

Mide el ángulo θ_{uv} entre u y v .

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta_{uv}$$

y despejo $\cos \theta_{uv}$

$$\cos \theta_{uv} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

Aplico la propiedad a este caso

$$\vec{u} = \vec{n} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \vec{P} - \vec{Q}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}}{\|\vec{n}\| \|\vec{P} - \vec{Q}\|}$$

Sustituyo $\cos \theta$ en la fórmula para d

$$d = \cancel{\|\vec{P} - \vec{Q}\|} \frac{\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}}{\cancel{\|\vec{n}\| \|\vec{P} - \vec{Q}\|}} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}}{\|\vec{n}\|}$$

Hacemos las cuentas de $\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}$ para intentar simplificarlo

$$\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q} = \vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{n} \cdot \vec{Q}$$

$$= (A, B, C) \cdot (x_p, y_p, z_p) - (A, B, C) \cdot (x_q, y_q, z_q)$$

$$= Ax_p + By_p + Cz_p - (Ax_q + By_q + Cz_q)$$

$$= Ax_p + By_p + Cz_p - (-D)$$

$$= Ax_p + By_p + Cz_p + D$$

Como Q está en W entonces

$$Ax_q + By_q + Cz_q + D = 0$$

Sustituyo $\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}$ en la fórmula

$$d = \frac{\vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{Q}}{\|\vec{n}\|}$$

y obtengo

$$d = \frac{Ax_p + By_p + Cz_p + D}{\|\vec{n}\|}$$

Para asegurar que el resultado no sea negativo agrego valor absoluto al numerador y me quedo con la fórmula

$$d = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|}$$

Listo para ~~comer~~

Usar



Ejemplo: Distancia entre un plano y un punto

Calcula la distancia entre el plano definido por la ecuación $4x - 3z + 7 = 0$ y el punto $(1, -9, -2)$.

Identifico el vector $\vec{n}$ con los coeficientes de x, y, z en la ecuación del plano:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

y sustituyo en la fórmula

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|4(1) + 0(-9) + (-3)(-2) + 7|}{\|(4, 0, -3)\|} \\ &= \frac{|4 + 0 + 6 + 7|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{17}{\sqrt{16 + 0 + 9}} = \frac{17}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{17}{5} = 3.4 \end{aligned}$$

Ejercicios para usar la fórmula

- 1) Calcula la distancia entre el plano $2x - 3y + z - 5 = 0$ y el punto $(1, 0, -1)$.
- 2) Calcula la distancia entre el plano $P = s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el punto $(4, 2, -1)$.
- 3) Utiliza la fórmula de distancia entre un punto y un plano para deducir una fórmula de distancia entre dos planos.

Soluciones →

Distancia entre un plano y un punto

Ejercicios para usar la fórmula

- 1) Calcula la distancia entre el plano $2x - 3y + z - 5 = 0$ y el punto $(1, 0, -1)$.

$$d = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = -5$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2(1) + (-3)(0) + (1)(-1) + (-5)|}{\|(2, -3, 1)\|} \\ &= \frac{|2 - 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (1)^2}} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

- 2) Calcula la distancia entre el plano $P = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el punto $(4, 2, -1)$

Calcular la ecuación general del plano.

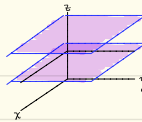
$$\begin{aligned} \vec{n} &= (0, 1, 2) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1-2) - \hat{j}(0-2) + \hat{k}(0-1) \\ &= \hat{i}(-1) - \hat{j}(-2) + \hat{k}(-1) \\ &= (-1, 2, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \quad (x_0, y_0, z_0) \text{ en el plano} \\ &= -(A(0) + B(0) + C(0)) = 0 \quad (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$d = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d = \frac{|-1(4) + 2(2) + (-1)(-1) + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Distancia entre dos planos



- Si los planos no son paralelos $\rightarrow$ Se cruzan
 $\rightarrow$ La distancia entre ellos es 0.

- Supongamos que W y V son paralelos, entonces tienen un mismo vector normal por lo tanto puedo ver sus ecuaciones de la siguiente manera

$$W = \{ (x, y, z) \mid Ax + By + Cz + D_1 = 0 \}$$

$$V = \{ (x, y, z) \mid Ax + By + Cz + D_2 = 0 \}$$

donde $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector normal a ambos planos

Luego $d_{W,V} = d_{W,P}$ para cualquier $P \in V$. Así que ahora necesito un punto en el plano V . Pero si (x_v, y_v, z_v) es un punto en V se cumple $Ax_v + By_v + Cz_v + D_2 = 0$ y por lo tanto $z_v = \frac{-Ax_v - By_v - D_2}{C}$

$P_v = (x_v, y_v, z_v) = (x_v, y_v, \frac{-Ax_v - By_v - D_2}{C})$
Utilizando la fórmula de distancia entre un plano y un punto con W y P_v obtengo.

$$\begin{aligned} d_{W,P_v} &= \frac{|Ax_v + By_v + Cz_v + D_1|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|Ax_v + By_v + C \left(\frac{-Ax_v - By_v - D_2}{C} \right) + D_1|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|-D_2 + D_1|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|D_1 - D_2|}{\|\vec{n}\|} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d_{W,V} = \frac{|D_1 - D_2|}{\|\vec{n}\|}$$

Distancia entre dos planos

Ejemplo: Calcular la distancia entre los planos definidos por las ecuaciones

$$\underbrace{12x+6y-3z-6=0}_W \text{ y } \underbrace{4x+2y-z-5=0}_V$$

Usando la fórmula de distancia entre dos planos

$$d_{W,V} = \frac{|D_1 - D_2|}{\|\vec{n}\|}$$

Para usar esta fórmula necesito que tanto W como V tengan un mismo vector normal. Para lograr esto voy a dividir la ecuación de W entre 3 y dejar la ecuación de V igual. Así, con $4x+2y-z-2=0$ y $4x+2y-z-5=0$ ya puedo usar $\vec{n}=(4,2,-1)$ en ambos planos.

Y conocer tanto los valores de A, B y C como los de D_1 y D_2 para utilizar la fórmula.

$$A=4, B=2, C=-1, D_1=-2 \text{ y } D_2=-5$$

$$d_{W,V} = \frac{|D_1 - D_2|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-2 - (-5)|}{\|(4,2,-1)\|} = \frac{|3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}} \\ = \frac{3}{\sqrt{16+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

Buscar un punto en un plano y calcular la distancia de ese punto al otro plano

$$d = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|}$$

Para encontrar un punto en V daré valores a x y y y luego despejaré en la ecuación de V para obtener el valor de z .

$$z = 4x + 2y - 5, \text{ si } P_v = (x_v, y_v, z_v) \in V$$

entonces para $x_v = y_v = 0$ obtengo $z_v = 4(0) + 2(0) - 5 = -5$.

De aquí que $P_v = (0, 0, -5) \in V$. Por otro lado, de W: $4x + 2y - z - 2 = 0$

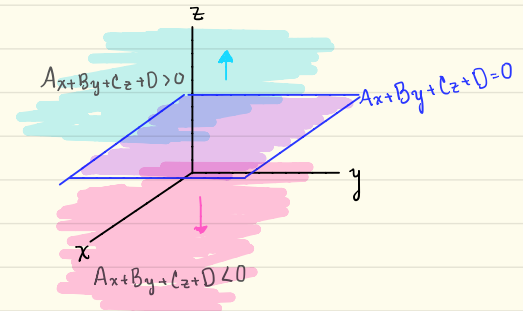
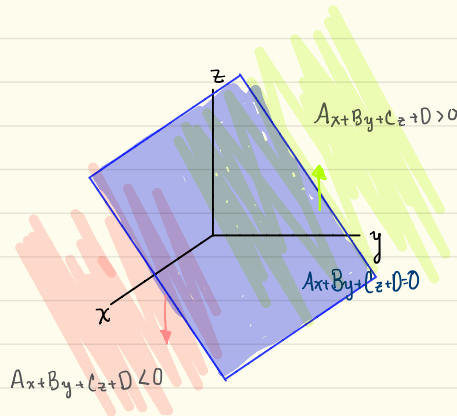
obtengo $\vec{n} = (4, 2, -1)$ y $D = -2$. Ahora calcularé la distancia entre P_v y W

$$d_{W,V} = d_{W,P_v} = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|4(0) + 2(0) + (-1)(-5) + (-2)|}{\|(4,2,-1)\|} \\ = \frac{|0 + 0 + 5 - 2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|5-2|}{\sqrt{16+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

Semiespacios

Definición. Un *semiespacio* es cualquiera de las regiones del espacio separadas por un plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, y cada uno están caracterizado por una de las desigualdades

$$Ax + By + Cz + D > 0 \quad \text{ó} \quad Ax + By + Cz + D < 0.$$



+ Imágenes creadas con Bitmoji

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

