Ejercicios resueltos de espacios vectoriales

Demuestra que si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente entonces $[u, v, w] = 0$.

Supongamos que $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes. Entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w = \alpha u + \beta v$. Así

$$
\begin{aligned}
[u, v, w] = [u, v, \alpha u + \beta v] &= [u, v, \alpha u] + [u, v, \beta v] \\
&= \alpha [u, v, u] + \beta [u, v, v] \\
&= \alpha [v, u, u] + \beta [u, v, v] \\
&= \alpha (v \cdot u \times u) + \beta (u \cdot v \times v) \\
&= \alpha (v \cdot \bar{0}) + \beta (u \cdot \bar{0}) \\
&= \alpha (0) + \beta (0) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Obs. Sea $u \in \mathbb{R}^3$, entonces $u \times u = 0$.

$u = (x, y, z)$

$$
u \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} y & z \\ y & z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} x & z \\ x & z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i(yz - yz) - j(xz - xz) + k(xy - xy) \\
&= i(0) - j(0) + k(0) = 0i + 0j + 0k \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Calcula el ángulo entre los vectores $(-3,-1)$ y $(-2,4)$.

$u=(-3,-1)$, $v=(-2,4)$

$(-3,-1)\cdot(-2,4) = (-3)(-2)+(-1)(4) = 6-4 = 2$

$\|u\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\|v\| = \sqrt{(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$$\theta = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}\right) = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{20}}\right) \approx 81.86^\circ \approx 1.42 \text{ rad}$$

Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $(3,4,5)$, $(-1,0,3)$ y $(9,5,2)$.

$\underset{u}{(3,4,5)}$, $\underset{v}{(-1,0,3)}$ $\underset{w}{(9,5,2)}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -1(8-25) - 0(\ \ ) + 3(15-36) = -1(-17)+3(-21)$$

$$= 17-21 = -4$$

$\mathrm{Vol} = |[u,v,w]| = 4$

Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Definimos el vector $\overline{0}_n \in \mathbb{R}^n$ como el vector que tiene cero en cada una de sus entradas. Demuestre que $\overline{0}_n \cdot v = 0$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$.

Dem.

Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow$

$$\overline{0}_n \cdot v = (0, 0, \dots, 0) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n = 0 + \dots + 0 = 0$$

$\blacksquare$

Demuestra que $v \times v = \overline{0}$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$.

Dem.

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ v \\ v \end{array} & \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \end{array} = i\begin{vmatrix} y & z \\ y & z \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} x & z \\ x & z \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= i(yz - yz) - j(xz - xz) + k(xy - xy)$$

$$= i0 - j0 + k0 = (0, 0, 0) \quad \blacksquare$$

Considere los siguientes subconjuntos del feliz espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.
a) $A = \{v \in \mathbb{R}^2 | d(\overline{0}, v) \leq 1\}$ el conjunto de vectores que están a distancia menor o igual que 1 del origen.
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$
Diga si los conjuntos A y B son espacios vectoriales o no. Justifique su respuesta.

Como $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ es E.V. voy a verificar si son ono subespacios de $\mathbb{R}^2$.

a) No es subespacio por que no cumple la cerradura de la suma ni la del producto escalar.
Por ejemplo $(1,0) \in A$
$(1,0) + (1,0) = (2,0)$ esta a distancia 2 del $(0,0)$
por lo tanto $(0,2) \notin A$.

b) (x,y) tales que $\underline{x=-y} \Rightarrow y = -x$

a) Cerradura de suma

$\underset{v}{(x_1, y_1)}$ y $\underset{u}{(x_2, y_2)} \in B \Rightarrow \underset{v}{(x_1, -x_1)} + \underset{u}{(x_2, -x_2)} = (x_1 + x_2, -x_1 + (-x_2))$
$= (\underbrace{x_1 + x_2}, \underbrace{-(x_1 + x_2)}) \in B$

b) Neutro aditivo
$(0,0) = (0,-0) \Rightarrow (0,0) \in V$

c) Cerradura prod. esc.

Sea $v \in B \Rightarrow v = (x, -x)$, sea $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v = \lambda(x, -x) = (\lambda x, -\lambda x) \in B$

d) Inverso aditivo

Sea $v \in B \Rightarrow v = (x, -x)$ su inverso aditivo es $-v = (\underline{-x}, \underline{-(-x)}) \in B$

Resuelva uno de los siguientes incisos.

a) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Demuestre que cualquier conjunto de con $n+1$ vectores es linealmente dependiente.

b) Diga si el siguiente subconjunto $\{(5,-3,-2),(-5,4,1),(1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

$u \quad v \quad w$

a) Sabemos que $\dim(\mathbb{R}^n)=n$ y que cualquier base de $\mathbb{R}^n$ tiene la misma cardinalidad y que cada base es un conjunto máximo independiente, por lo tanto cualquier conjunto con $n+1$ vectores deberá ser l.d.

b)

$\lambda_1(5,-3,-2)+\lambda_2(-5,4,1)=(1,-1,0)$

$5\lambda_1-5\lambda_2=1$

$-3\lambda_1+4\lambda_2=-1 \quad \Rightarrow \quad -3\lambda_1+4(2\lambda_1)=-1 \Rightarrow -3\lambda_1+8\lambda_1=-1 \Rightarrow 5\lambda_1=-1 \Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{5}$

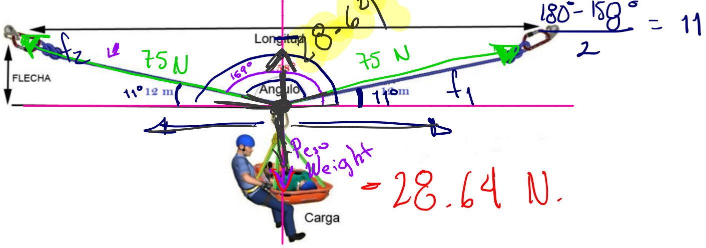
$-2\lambda_1+1\lambda_2=0 \Rightarrow 2\lambda_1=1\lambda_2 \Rightarrow$

$\lambda_2=2\lambda_1=2\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{5}(5,-3,-2)-\frac{2}{5}(-5,4,1)=\left(-1,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)+\left(2,-\frac{8}{5},-\frac{2}{5}\right)=\left(1,-\frac{5}{5},0\right)=(1,-1,0)$

Son linealmente dependientes

Consideremos un sistema de poleas como el siguiente:



Donde la fuerza correspondiente a la cuerda a espaldas del rescatista es $\vec{f_1}$ con un valor de 75 N, y la fuerza de la cuerda frente al rescatista es $\vec{f_2}$ con un valor de 75 N. ¿Cuáles son las componentes -sobre x a) e y- de estas fuerzas? ¿Cuánto debe valer la fuerza de peso que ejerce la carga para que la fuerza total resultante sea de 0 N? b)

a)

$$f_1 \begin{cases} f_{x1} = 75N \cos 11 = 73.62 \text{ N} \\ f_{y1} = 75N \operatorname{Sen} 11 = 14.31 \text{ N} \end{cases}$$

$$f_2 \begin{cases} f_{x2} = 75N \cos 169 = -73.62 \text{ N} \\ f_{y2} = 75 \operatorname{Sen} 169 = 14.31 \text{ N} \end{cases}$$

b)

$$\bar{f_1} + \bar{f_2} + \bar{W} = 0$$

$$f_1 + f_2 = -W$$

$$f_{x_1} + f_{x_2} = 0$$

$$f_{y_1} + f_{y_2} = 28.62 \text{ N}$$

$$\boxed{W = -28.64 \text{ N}}$$

$$\boxed{\text{Pesa } 28.64 \text{ N.}}$$

Las redes cristalinas consisten en un agrupamiento de nodos cristalinos generados por nucleación, que forman y conglomeran cuadrantes cristalinos, los cuales tienen una estructura particular (llamada *paralelepípedo*) generada por tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. El volumen de cada uno de estos cuadrantes está calculado por el producto mixto (o producto triple) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.Supongamos a los vectores $\vec{a}=(2,0,0)$, $\vec{b}=(0,\frac{1}{2},0)$ y $\vec{c}=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},2)$. Calcule el volumen del paralelepípedo.

Sabemos que Vol del paralelepípedo es el prod. triple de los vectores

$$[a,b,c]=\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}(2) - (-\tfrac{1}{4})0\right) - 0 + 0$$

$$= 2(1-0)$$

$$= 2(1)$$

$$= 2$$

$$\boxed{Vol = 2}$$

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World