Operaciones con matrices

Notación: Una matriz (mxn)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ será denotada como $A = (a_{ij})$.

Definición: Sean $A = (a_{ij})$ una matriz $(m \times n)$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $(r \times s)$. Decimos que $A = B$ si tienen el mismo tamaño y las entradas coinciden. ▨

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 0 & 3-2 \end{bmatrix}$$

Suma de matrices y multiplicación por un escalar

Definición: Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de tamaño $(m \times n)$.

La suma $A+B$ es la matriz $(m \times n)$ con coeficientes:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definición: Sean $A = (a_{ij})$ una matriz $(m \times n)$ y r un escalar (en $\mathbb{R}$).

El producto rA es la matriz $(m \times n)$ con coeficientes.

$$(rA)_{ij} = r a_{ij}.$$

Ejemplo:

$$2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Vectores en $\mathbb{R}^n$.

Definición: Un vector n-dimensional es una n-tupla de números reales.
Lo escribiremos como una columna:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1) El 2-vector $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

2) El 3-vector $\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$

Definición: El conjunto de todos los n-vectores con entradas reales es llamado el n-espacio Euclideano y lo denotamos $\mathbb{R}^n$ ("erre n").

Notemos que con estas definiciones tenemos una suma y una multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$.

Producto escalar

Definición: El producto escalar o producto punto de dos vectores

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$$

en $\mathbb{R}^n$ es el siguiente número.

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n.$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\2\\3\end{bmatrix}=2(-4)+(3)(2)+(-1)(3)$$
$$=-8+6-3=-5.$$

Multiplicación de matrices

Definición: Sean

A una matriz $(m\times n)$, y
B una matriz $(n\times s)$.

El producto AB es una matriz $(\underset{A}{m}\times \underset{B}{s})$ con entradas.

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$
$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

Si el tamaño de renglones de A no es igual al tamaño de columnas de B, entonces AB no está definido.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)+1(0)+(-3)2 & 2(2)+1(-3)+(-3)(1) \\ (-2)(-1)+2(0)+(4)(2) & (-2)(2)+(2)(-3)+4(1) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{(2\times 3)}{A} \quad \underset{(3\times 2)}{B}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}}\ \blacksquare$$

Ejemplo: Considere el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Tenemos la matriz de coeficientes:

$$A = (a_{ij})$$

el vector de incógnitas $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ n-vector

el vector de b's $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ m-vector

Podemos expresar el sistema en la forma matriz-vetor:

$$\underline{Ax = b.} \leftarrow$$

En efecto:

$$\underset{m\times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad\qquad //$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Exprese los sistemas

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - y_2 \\ x_2 &= -3y_1 + 2y_2 \\ x_3 &= y_1 + 3y_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} y_1 &= -4z_1 + 2z_2 \\ y_2 &= 3z_1 + z_2 \end{aligned}$$

en forma matricial y use multiplicación de matrices para expresar x_1, x_2, x_3 en términos de z_1, z_2.

Solución: Para el primer sistema tengo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

y el segundo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Sustituyo $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en la primera ec.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\overset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \overset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 18 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -11z_1 + 3z_2 \\ x_2 &= 18z_1 - 4z_2 \\ x_3 &= 5z_1 + 5z_2 \end{aligned} \quad \boxtimes$$

Forma vectorial de la solución general

Usaremos el lenguaje de matrices para simplificar la notación de la solución general.

Ejemplo: La matriz B es la matriz aumentada de un sistema homogeneo. Encuentre la solución general y exprésela en notación vectorial.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Solución: El sistema asociado a B es

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene sol. general.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + 3x_4 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_4 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$