Distancia

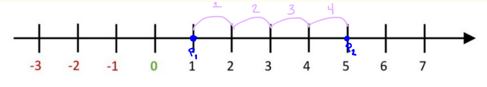
Distancia entre dos puntos

+ en la recta
+ en el plano
+ en el espacio
+ en el espacio $\mathbb{R}^n$

Distancia

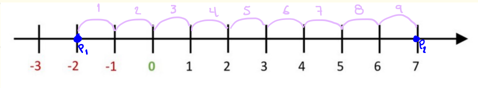
Definimos la distancia entre dos objetos como la longitud del segmento de la recta que los une.

¿Cómo calcularla?



¿ $p_2 - p_1$?
$5 - 1 = 4$

¿ $P_2 - P_1$?
$1 - 5 = -4$



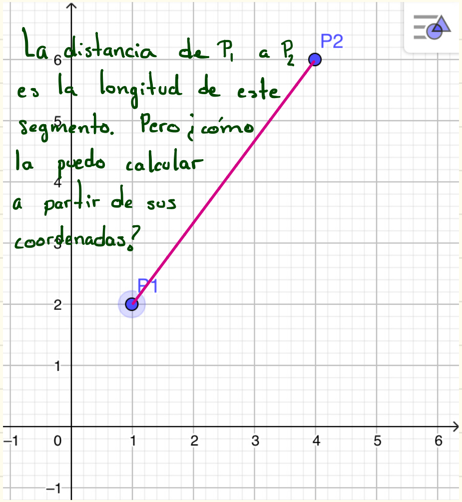
$|P_2 - P_1|$
$|7-(-2)| = 9$
$|P_1 - P_2|$
$|-2-(7)| = |-9| = 9$

En la recta calculamos la distancia entre dos puntos p_1 y p_2 con la fórmula

$$d = |P_2 - P_1|$$

Ahora la siguiente pregunta es: ¿cómo calcular la distancia entre dos puntos en el plano?

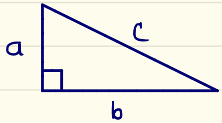
La distancia de A a B es la longitud de este segmento. Pero ¿cómo la puedo calcular a partir de sus coordenadas?



Para esto recurriremos a....

Teorema de Pitágoras.

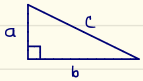
En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de la longitud de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



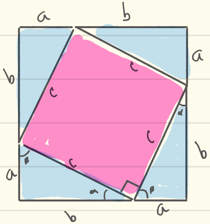
$\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Demostración del teorema de Pitágoras.

Con base al triángulo del enunciado del teorema



consideremos el siguiente cuadrado y



calculemos su área A.

- Como sus lados miden a+b su área es

$A=(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

- También podemos calcular su área sumando las áreas de cada figura dentro del cuadrado, así

$A = 4\left(\frac{ab}{2}\right)+c^2 = 2ab+c^2$.

ojo Notemos que la figura de adentro sí es un cuadrado pues sus ángulos son rectos y cada lado mide lo mismo.

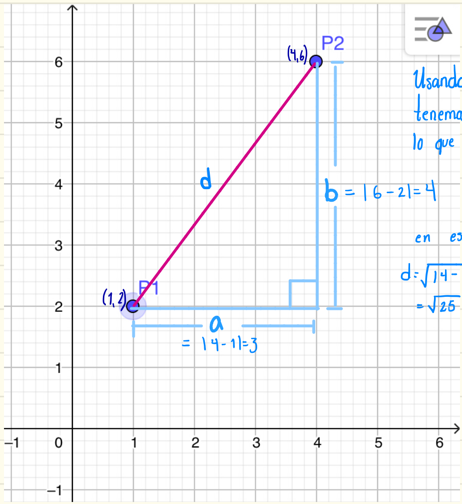
Los ángulos α y β suman 90°

Dado que ambas expresiones representan la misma área las podemos igualar, y así obtenemos:

$a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$ restando 2ab a la ecuación queda

$a^2+b^2=c^2$ tal como queríamos.

Ahora sí, vamos a calcular la distancia entre dos puntos en el plano.



Usando el teorema de Pitágoras tenemos que $d^2=a^2+b^2$, lo que nos deja con $d=\sqrt{a^2+b^2}$

en este caso sería

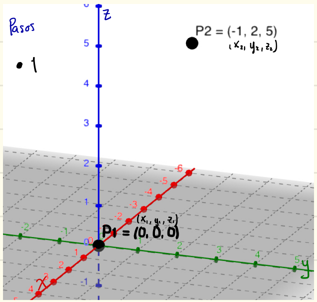
$d=\sqrt{|4-1|^2+|6-2|^2}=\sqrt{3^2+4^2}$

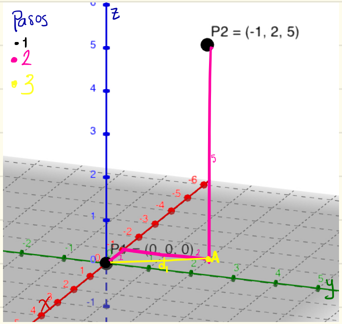
$=\sqrt{25}=5$

Si quisiéramos dar una fórmula para medir la distancia entre dos puntos cuales quiera, P1=(x1,y1) y P2=(x2,y2), en el plano de acuerdo a nuestros cálculos, la fórmula sería:

$$\boxed{d_{(P_1,P_2)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

En este punto de nuestras vidas la siguiente pregunta es ¿cómo calcular la distancia entre dos puntos, P1=(x1,y1,z1) y P2=(x2,y2,z2), en el espacio?





• 1 Para poder visualizar mejor el ejemplo pensemos que el punto P_1 es el origen.

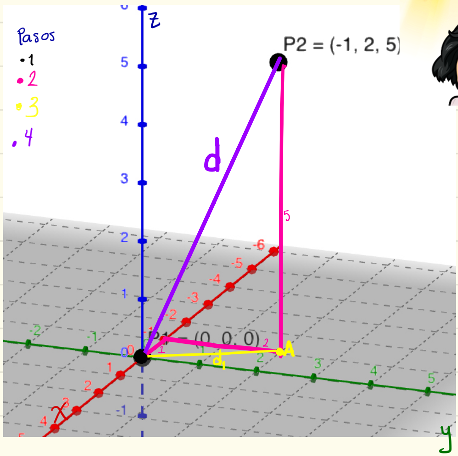
• 2 Luego recordemos como ubicamos un punto, en este caso P_2, en $\mathbb{R}^3$ y marquemos la trayectoria que seguimos, aquí es -1 en x, 2 en y y 5 en z.

• 3 Calculamos d_1 la distancia de P_1 al punto A usando la fórmula de distancia en el plano $d_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

• 4 Observamos que los puntos P_1, P_2 y A forman un triángulo rectángulo y aplicamos Teo. de Pitágoras para calcular d, la distancia de P_1 a P_2.

así obtenemos $d^2=d_1^2+(z_2-z_1)^2$, por lo tanto $d=\sqrt{d_1^2+(z_2-z_1)^2}$, recordemos que $d_1^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ y sustituyamos d_1^2 en la fórmula para calcular la distancia d entre P_1 y P_2

$$\boxed{d_{(P_1,P_2)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$



Aplicando la fórmula a nuestro ejemplo queda

$$d=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(5)^2}=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}$$

Ahora ya sólo nos queda una cosa por hacer: Deducir una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos , A=(a1,a2,...,an) y B=(b1,b2,...,bn), en el espacio $\mathbb{R}^n$

Como se han de estar imaginando podemos seguir utilizando el teorema de Pitágoras a diestra y siniestra, n-1 veces, para llegar a la fórmula

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}$$

Combo Fatality

SuperMega Ultra

+ Imágenes creadas con Bitmoji
+ Gráficas creadas con geogebra
+ Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World