MATRICES Y OPERACIONES CON MATRICES: SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN. TRANSPUESTA.

Álgebra Superior I

MATRICES

¿Qué son?

Una matriz es un arreglo bidimensional de elementos, usualmente números.

Ejemplo: Hay cantidad de renglones y n cantidad de columnas

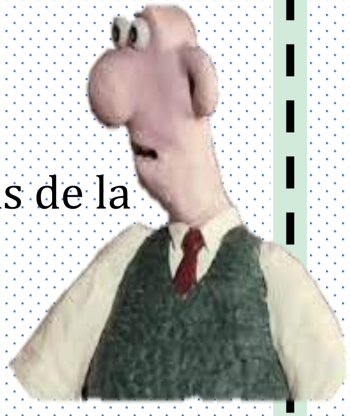
$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & -1 \\ -9 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} & \text{m=3} \\ \text{n=4} & \end{array}$$

Diremos que una matriz es de tamaño *mxn* *"m por n"* cuando tenga m renglones y n columnas

Notación:

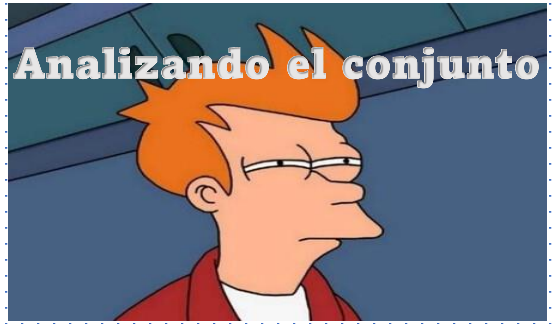
$$\boxed{\mathcal{M}_{nxn}\,(D)}$$

- M cursiva de la matriz
- nxn tamaño de las matrices
- D conjunto al que pertenecen las entradas de la matriz



¿A que conjunto de matrices pertenecen A,B y C?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon\ \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{Z})$$



$$B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1/_{2} \end{pmatrix} \epsilon\ \mathcal{M}_{2x5}(\mathbb{Q})$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ \pi \\ 1 \\ 0 \\ e \\ 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \mathcal{M}_{6x1}(\mathbb{R}) \\ \notin\ \mathcal{M}_{6x1}\,(\mathbb{Z}) \end{array}$$

NOTACIÓN:

Cuando queremos definir una matriz A a partir de sus entradas utilizamos la notación

$$A = (a_{ij}) \text{ ó } A = a_{ij}$$

Donde a_{ij} se refiere a la entrada que esta en el renglón i y la columna j.

Por ejemplo consideremos la matriz A:

$$\boxed{\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longmapsto R_1 \\ \longmapsto R_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} & \end{array}}$$

Esto podemos verlo como:

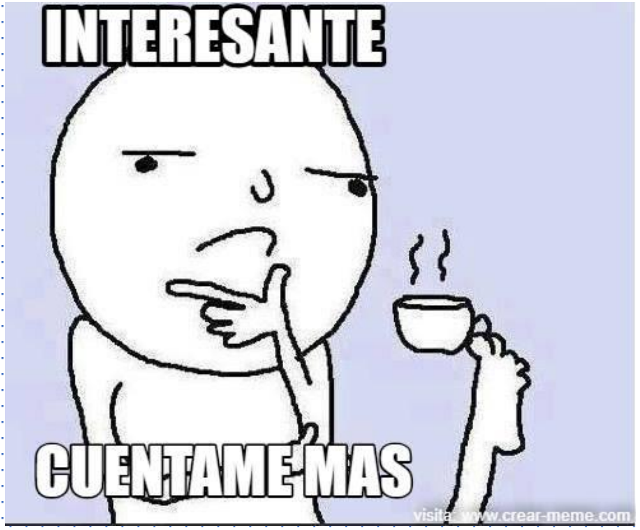
$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{11} = 5 & a_{12} = 3 & a_{13} = 7 \\ a_{21} = 2 & a_{22} = 1 & a_{23} = 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longmapsto R_1 \\ \longmapsto R_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} & \end{array}$$

¿Quién es A $= (a_{ij})$ $con\ 1 \leq j \leq 5\ y$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0\ si\ j \neq 2 \\ 1\ si\ j = 2 \end{cases} ?$$

3 renglones y 5 columnas.

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1\ con\ i = 1 \\ R_2\ con\ i = 2 \\ R_3\ con\ i = 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} j = 1 & j = 2 & j = 3 & j = 4 & j = 5 \end{array} & \end{array}$$

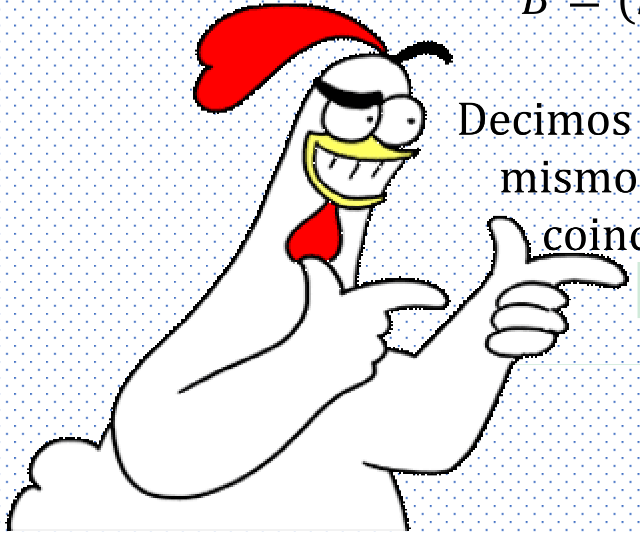


OPERACIONES CON MATRICES

Notación una matriz *(mxn)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

Definición: Sean $A = (a_{ij})$ una matriz *(mxn)* y $B = (b_{ij})$ *una matriz* (rxs)



Decimos que A=B si tienen el mismo tamaño de entradas coinciden.

Es decir m=r, n=s y

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall_{ij}$$

Suma de matrices

Definición: **Sean $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ y $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$ matrices de tamaño *(mxn)***

La suma de A+B es la matriz *(mxn)* con coeficientes:

$$(A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicaion por un escalar

Definición: **Sea $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ una matriz (mxn) y r un escalar (en $\mathbb{R}$)**

El producto $r \cdot A$ es la matriz (mxn) con coeficientes:

$(r \cdot A)_{ij} = r \cdot a_{ij}$

Ejemplo:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

»» Vectores en $\mathbb{R}^n$. ««

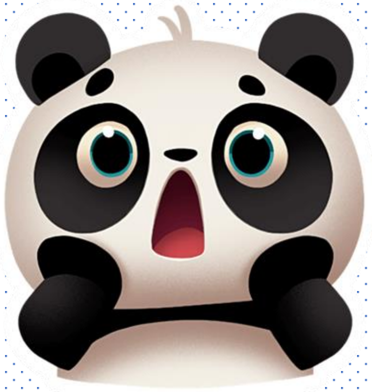
Definición: Un vector n-dimensional es una n-tupla de números reales.
Lo escribiremos como una columna:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

1) el 2-vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2)El 3- vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$



Definición: El conjunto de todos los n vectores con entradas reales es llamado el n-espacio euclidiano y lo denotamos $\mathbb{R}^n$ ("erre n")

Notemos que con estas definiciones tenemos una suma y una multiplicación por escalares en $\mathbb{R}^n$

Producto escalar

Definición: El producto escalar o producto punto de dos vectores.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$$

En $\mathbb{R}^n$ es el siguiente número $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(-4) + (3)(2) + (-1)(3) \\ = -8 + 6 - 3 = -5$$

Multiplicación de matrices

Definición: Sean **A** una matriz *(mxn)* y **B** una matriz *(nxs)*.

El producto **AB** es una matriz *(mxs)* con entradas i,j-ésima

dada por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{1j} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Si el tamaño de renglones de **A** no es igual al tamaño de

columnas de **B** entonces **AB** no está definido.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2)(-1) + (1)(0) + (-3)(2) & 2(2) + (1)(-3) + (-3)1 \\ (-2)(-1) + (2)(0) + (4)(2) & (-2)(2) + (2)(-3) + (4)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Considere el sistema

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + a_{21}x_n & = b_2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Tenemos la matriz de coeficientes:

$$A = (a_{ij})$$

El vector de incógnitas $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ $n - vector$

El vector de b's $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$ $m - vector$

Podemos expresar el sistema en la forrma matriz − vector:

$$\boxed{Ax=b}$$

En efecto:

$$\overset{mxn}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \overset{nx1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Exprese los sistemas

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - y_2 \\ x_2 &= 3y_1 + 2y_2 \\ x_3 &= y + 3y_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} y_1 &= -4z_1 + 2z_2 \\ y_2 &= 3z_1 + z_2 \end{aligned}$$

En forma matricial u use multiplicación de matrices para expresar x_1, x_2, x_3 en términos de z_1, z_2

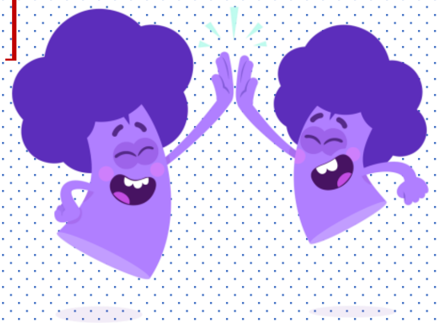
Solución:

Para el primer sitema tengo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Y el segundo $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

Sustituyo $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ *en la prime ec.*



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \overset{3x2}{\begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 18 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}} \overset{2x2}{\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 18 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -11z_1 + 3z_2 \\ x_2 &= 18z_1 - 4z_2 \\ x_3 &= 5z_1 + 5z_2 \end{aligned}$$

Forma vectorial de la solución general

Usaremos el lenguaje de matrices para simplificar la notación de la solución general

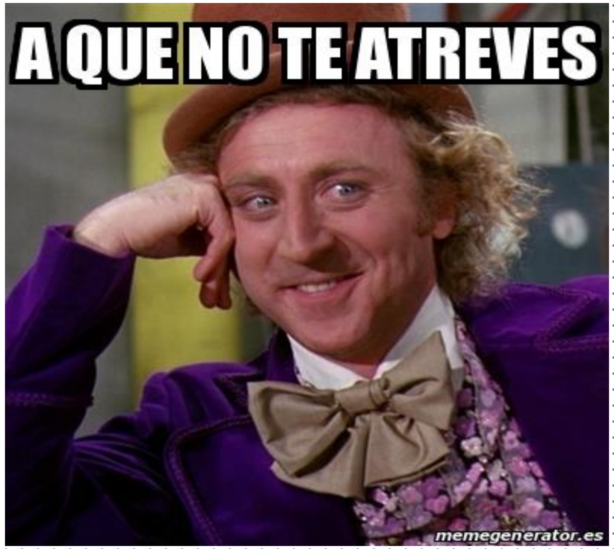
Ejemplo: La **matriz B** es la **matriz aumentada** de una sistema homogéneo.

Encuentre la solución general y exprésela en notación vectorial

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{array}\right)$$

Solución: El sistema asociado a B es $\begin{array}{l} x_1 \qquad - x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array}$ que tiene solución general $\begin{cases} x_1 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$ talque

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3+3x_4\\2x_3-x_1\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\2x_3\\x_3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3x_4\\-x_4\\0\\x_1\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$



MATRIZ TRANSPUESTA

Def. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz *(mxn),* entonces la transpuestas de A, denotada A^T, es la matriz $A^T = (a_{ij})$.

Notemos que A^T tiene tamaño *(nxm)*

Por ejemplo:

$$\text{Si } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Teorema: Si **A** y **B** son matrices *(mxn)* y **C** es *(nxp),* entonces:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$

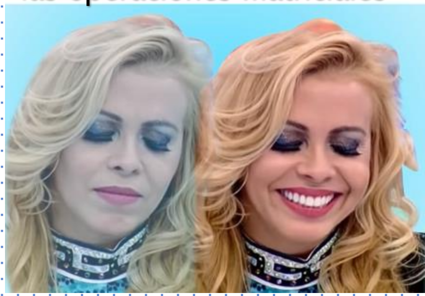
1. $(A\,C)^T = C^T A^T$
2. $(A^T)^T = A$

Propiedades algebraicas de las operaciones matriciales

Teorema: Si **A,B,C** son matrices *(mxn),* entonces

1. A+B=B+A *(conmutativa)*
2. (A+B)+C=A+(B+C) *(asociativa)*
3. Existe una única matriz *(mxn)* 0 *(llamada la matriz cero)* talque A+0=A para toda matriz A*(mxn)*
4. Dada una matriz A*(mxn),* existe una única matriz *(mxn)* P talque A+P=0

Como cuando ya entendiste las operaciones matriciales



Teorema:

ASOCIATIVA

1. Si A,B,C son matrices *(mxn),(nxp),(pxq)* respectivamente, entonces $(\mathrm{AB}) \cdot C = A(BC)$
2. Si r y s son escalares, entonces r$\cdot (sA) = (rs)A$
3. Si r $\cdot (AB) = (rA)B = A(rB)$

DISTRIBUTIVA

1. Si A,B son matrices *(mxn)* Y C es *(nxp)*, entonces $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$
2. Si A es *(mxn)* y BC son *(nxp)* entonces $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = AB + AC$
3. Si r y s son escalares A es *(mxn)*, entonces $(\mathrm{r}+\mathrm{s}) \cdot A = rA + sA$
4. $r(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = rA + rB$

DATO CURIOSO

$$AB \neq BA$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(2) + (0)(0) & (2)(3) + 0(1) \\ 2(1) + (1)(0) & (3)(1) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

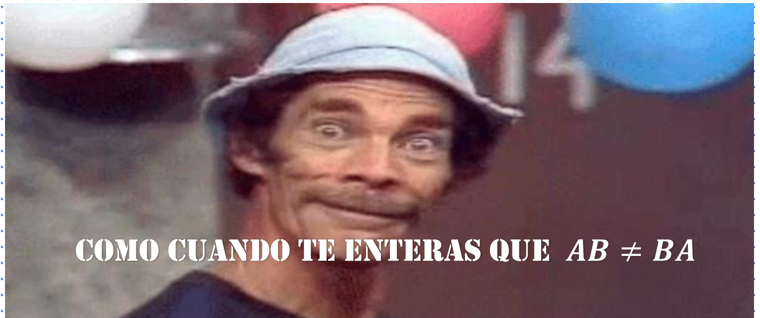
$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2)(2) + (3)(1) & (2)(0) + (3)(1) \\ (0)(2) + (1)(1) & (0)(0) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

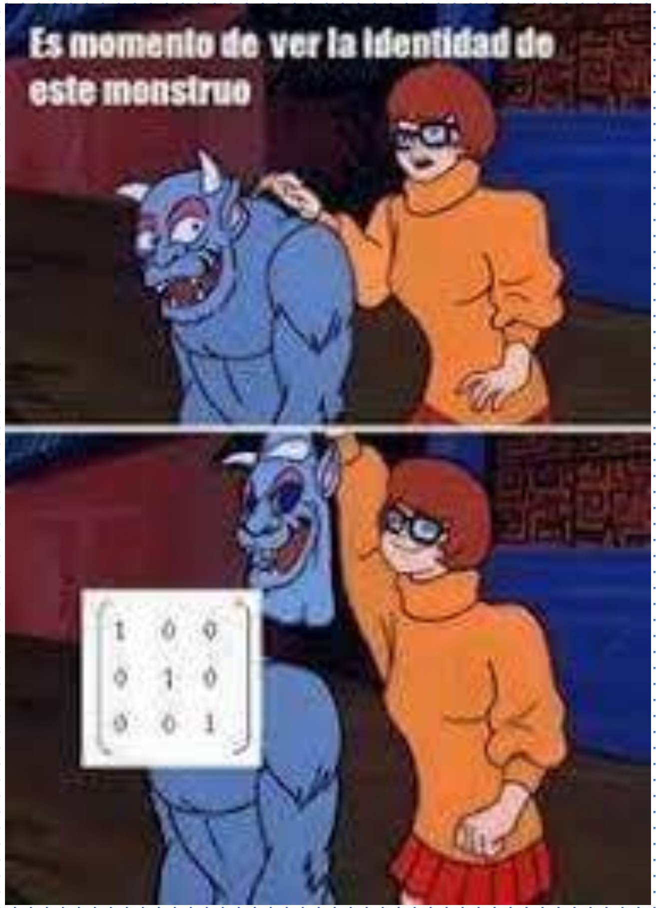


Matriz identidad

Definición: Sea $n\epsilon\ \mathbb{N}$ la matriz identidad de tamaño *(nxn)* con la matriz de 1's en la diagonal principal y 0´s en todas las demás entradas

Es decir

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Su principal propiedad de I_n es que

$$I_n A = A$$
$$A I_n = A$$

Para toda matriz A (nxn)

También se cumple

$$I_q B = B$$
$$B I_p = B$$

Para toda matriz B(pxq)