$\frac{n!}{(n-k)!}$ $n!$

Combinatoria

$C_{n,k}$ n^k $\binom{n}{k}$ $P_{n,k}$

Factorial y combinaciones

!

$\binom{n}{k}$

Factorial

Definimos $0! = 1$

Luego, para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$n! = n(n-1)!$

Por ejemplo:

$0! = 1$

$1! = 1(1-1)! = 1(0!) = 1$

$2! = 2(1!) = 2\times 1$

$3! = 3(2!) = 3(2\times 1) = 3\times 2\times 1$

$4! = 4(3!) = 4(3\times 2\times 1) = 4\times 3\times 2\times 1$

y así

Entonces para $n \in \mathbb{N}$ su factorial es

$$n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$$

Combinatoria

Para elegir k elementos de un conjunto con n elementos utilizamos las combinaciones $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ cuya fórmula es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por ejemplo:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)(4\times 3\times 2\times 1)}$$

$$= \frac{7\times \cancel{6}\times 5\times \cancel{4\times 3\times 2\times 1}}{\underbrace{\cancel{(3\times 2\times 1)}}_{6}\cancel{(4\times 3\times 2\times 1)}}$$

$= 7\times 5 = 35$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} =$$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1)(4\times 3\times 2\times 1)}$$

$$= \frac{10\times \overset{3}{\cancel{9}}\times \cancel{8}\times 7\times \cancel{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}}{\cancel{(6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1)}\cancel{(4\times 3\times 2\times 1)}}$$

$= 10\times 3\times 7 = 210$

¿Bloquear un celular?

¿Cuántos códigos diferentes hay para bloquear o desbloquear un celular si se tienen cuatro espacios para llenar, cada uno, con un dígito entre 0 y 9?

__ __ __ __

$$\underbrace{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}_{10 \text{ opciones}}$$

En cada uno de los espacios puedo poner cualquiera de los 10 números

$$\underset{\text{opciones}}{\underline{10}} \times \underset{\text{opciones}}{\underline{10}} \times \underset{\text{opciones}}{\underline{10}} \times \underset{\text{opciones}}{\underline{10}} = 10^4 = 10{,}000$$

posibles códigos.

Pero, ¿ y si no se pudiera repetir números?

10 — En la primer posición podemos poner cualquiera de los 10

9 — Como ya usamos uno de los números en la segunda posición podemos escoger entre los 9 dígitos restantes.

8 — Como ya usamos dos números para las posiciones anteriores ahora solamente podemos escoger entre los 8 números restantes.

7 — Dado que causamos tres de los 10 dígitos ahora podemos escoger cualquiera de los 7 números restantes

En total, serían $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5{,}040$ posibles códigos

¿Y si quiero hacer una fórmula de esto?

* Llamemos n al número total de objetos disponibles

* Llamemos k al número de posiciones o lugares que vamos a ocupar.

En el ejemplo anterior teníamos 10 números disponibles $(0,1,2,3,\ldots,9)$, así $n=10$.

Para cada código se ocubaban 4 lugares, entonces $k=4$

En ambos casos **Sí importa el orden**

En el primer caso **si se permitía repetir números** el resultado que obtubimos fue

10^4 o sea n^k

En el segundo caso **No se permitía repetir números**

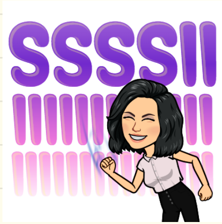
$$10\times 9\times 8\times 7=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{10!}{6!}$$

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n(n-1)\cdots(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutaciones

A este tipo de arreglos, donde sí importa el orden le llamamos permutaciones.



La notación es

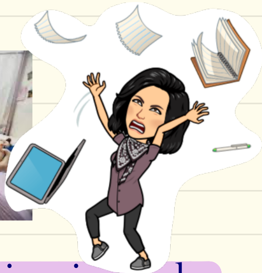
		Fórmula
$P_{n,k}$	Permutación para seleccionar k objetos de un total de n objetos disponibles sin permitir repeticiones.	$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
$PR_{n,k}$	Permutación para seleccionar k objetos de un total de n objetos disponibles permitiendo repeticiones.	$PR_{n,k} = n^k$

Llamamos variaciones a las permutaciones cuando el número de objetos disponibles n es mayor al número de objetos que vamos a ocupar, k.

Combinaciones

Usamos combinaciones

cuando no nos importa el orden.



Decimos que las combinaciones de n en k son las diferentes maneras de elegir k elementos de un conjunto que tiene n elementos diferentes.

Combinaciones de n en k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplo:

Pensemos en un conjunto de 3 elementos, quizá $\{\heartsuit, *, \circledcirc\}$

¿Cuántos subconjuntos de 0 elementos hay?

1, el conjunto vacío

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = \frac{3!}{1\cdot 3!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

¿Cuántos subconjuntos de 1 elementos hay?

3, los cuales son $\{\heartsuit\}$, $\{*\}$ y $\{\circledcirc\}$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{3\times 2\times 1}{1\cdot 2\times 1} = 3$$

¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos hay?

3, los cuales son $\{\heartsuit, *\}$, $\{\heartsuit, \circledcirc\}$ y $\{*, \circledcirc\}$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\times 2\times 1}{(2\times 1)(1)} = 3$$

¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos hay?

1, el conjunto entero $\{\heartsuit, *, \circledcirc\}$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = \frac{3!}{(3!)(1)} = \frac{3!}{3!} = 1$$

Conteo, ¿qué fórmula usar?

Para seleccionar k elementos de n elementos disponibles.

		¿Importa el orden?	
		Si	No
¿Admite repeticiones?	No	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
	Si	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Antes de resolver un problema de combinatoria tenemos que hacernos dos preguntas.
1) ¿Importa el orden?
2) ¿ se permiten repeticiones?

Ejemplo:

Se distribuyen tres regalos entre cinco chicos. De cuántas formas pueder hacerlo si:

a) Los regalos son iguales y cada chico puede recibir más de un regalo.
b) Los regalos son diferentes y cada chico puede recibir más de un regalo
c) Los regalos son iguales y cada chico sólo puede recibir un regalo.
d) Los regalos son diferentes y cada chico sólo puede recibir un regalo.

* En base a la tabla, ¿ que fórmula usarías en cada caso?

* Para este ejemplo. ¿Quién es n? . ¿Quien es k?

Solución. →

Ejemplo y solución.

Se distribuyen tres regalos entre cinco chicos. De cuántas formas pueden hacerlo si:

a) Los regalos son iguales y cada chico puede recibir más de un regalo.
b) Los regalos son diferentes y cada chico puede recibir más de un regalo
c) Los regalos son iguales y cada chico sólo puede recibir un regalo.
d) Los regalos son diferentes y cada chico sólo puede recibir un regalo.

De 5 niños, voy a seleccionar 3 para repartir los regalos.

$n = 5$

$k = 3$

		¿Importa el orden?	
		Sí	No
¿Admite repeticiones?	No	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
	Sí	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

a) Regalos iguales → No importa el orden

Se puede recibir más de un regalo → Admite repeticiones

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4\times 3\times 2\times 1}}{(3\times 2\times 1)\cancel{(4\times 3\times 2\times 1)}}$$

$$= 7\times 5 = 35$$

b) Regalos diferentes → Sí importa el orden

Se puede recibir más de un regalo → Admite repeticiones

No es lo mismo ganar un chocolate que ganar un punto extra

$$n^k = 5^3 = 5\times 5\times 5 = 125$$

c) Regalos iguales → No importa el orden

No se puede recibir más de un regalo → No admite repeticiones

$$\binom{n}{k} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times \overset{2}{4}\times \cancel{3\times 2\times 1}}{\cancel{(3\times 2\times 1)}\,(2\times 1)} = 5\times 2 = 10$$

d) Regalos diferentes → Sí importa el orden

No se puede recibir más de un regalo → No admite repeticiones

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times 4\times 3\times \cancel{2\times 1}}{\cancel{2\times 1}} = 5\times 4\times 3 = 60$$

Ejercicios

1. *¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con los 8 vértices de un octágono?;*
2. *En alguna institución hipotética a cada miembro se le asigna como clave el número que resulta de lanzar un dado 4 veces y escoger un número impar entre 0 y 20. ¿Cuántas posibles claves hay?*
3. *En una carrera donde participan 12 felices caballos y Wini, ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir los premios los cuales son: la medalla de oro, la de plata, la de bronce y una salchicha, sabiendo que Wini ganará la salchicha y que cada participante solo puede ganar un premio?.*

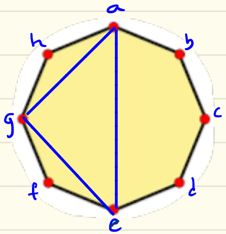
Trata de resolver estos ejercicios y cuando termines puedes comparar tu solución con mi solución y para ver si llegas a la misma respuesta.

Soluciones a continuación →

De esta manera puedes hacer tu propia autoevaluación.

Recuerda que la práctica hace al maestro.

1. *¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con los 8 vértices de un octágono?;*



Notemos que los triángulos aeg, eag, gae son iguales. Por lo tanto No importa el orden

y cualquier otra combinación con las letras a, e y g.

Luego notemos que para formar un triángulo necesito 3 vértices diferentes, por lo tanto No se permite repetir vértices.

Fórmula $\binom{n}{k}$, $n=8$ y $k=3$

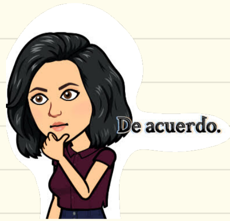
$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\underbrace{(8-3)!}_{5!}} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(5\times4\times3\times2\times1)} = 8\times7 = 56$$

Se puede hacer 56 triángulos diferentes.

2. *En alguna institución hipotética a cada miembro se le asigna como clave el número que resulta de lanzar un dado 4 veces y escoger un número impar entre 0 y 20. ¿Cuántas posibles claves hay?*

Empecemos por ver el ejemplo de un código. Digamos que al tirar el dado cuatro veces obtengo los siguientes números: 6,4,2 y 5. Posteriormente debo escoger un número impar, digamos que escojo el 15 entonces mi código será: 6 4 2 5 15.

Notemos que cada código tiene la siguiente estructura



Número del 1 al 6.	Número del 1 al 6.	Número del 1 al 6.	Número del 1 al 6.	Número impar entre 0 y 20.
				1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19.
6 posibles opciones.	6 posibles opciones.	6 posibles opciones.	6 posibles opciones.	10 posibles opciones.

Lanzar el dado

Escoger un impar entre 0 y 20

Por lo tanto tenemos un total de

$$\underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} \times \underline{10} = 6^4(10) = 12,960$$

posibles códigos

3. *En una carrera donde participan 12 felices caballos y Wini, ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir los premios los cuales son: la medalla de oro, la de plata, la de bronce y una salchicha, sabiendo que Wini ganará la salchicha y que cada participante sólo puede ganar un premio?.*

Sabemos que hay 4 premios y que Wini ganará uno de ellos. Entonces sólo hay que preocuparnos por cómo se repartirán los 3 premios restantes entre los 12 caballos.

- Como sólo pueden ganar un premio
  No se admite repetición.
- Como los premios son diferentes
  Si importa el orden.

Fórmula: $\frac{n!}{(n-k)!}$, $n=12$, $k=3$

Solución: $\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

Hay 1,320 maneras de repartir los premios.

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.