

ÁLGEBRA SUPERIOR I

INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

Videos alternativos 1 y 2

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA (PIM)

Def. Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ es un subconjunto inductivo si y solo si siempre que $n \in S$ entonces $n+1 \in S$.

Ej.

1. $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo
2. $\{1,3,4\}$ no es inductivo

PIM: Si S es un conjunto inductivo y $1 \in S$ entonces $S = \mathbb{N}$

Ej. La definición no inductiva del factorial de un número natural n es

$$n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$$

Por ejemplo

$$1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

La definición inductiva de $n!$ es:

- i. $1! = 1$
- ii. Si $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$



$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

El PIM lo podemos usar para demostrar “cierto tipo de enunciados”
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Podemos conjeturar:

“Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ ”

Ejemplo demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Demostración:

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2\}$

Quiero demostrar que $S = \mathbb{N}$

Por el PIM, basta demostrar que $1 \in S$ y que S es inductivo

- i. (Paso base) $1 = 1^2$, por lo tanto $1 \in S$
- ii. Sea $m \in S$. Esto quiere decir que (hipótesis de inducción)

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) = m^2$$

Quiero demostrar que $m + 1 \in S$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) + (2m + 1) &= m^2 + (2m + 1) \\ &= m^2 + 2m + 1 \\ &= (m + 1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $m + 1 \in S$ (Paso inductivo)

Así que por el PIM, $S = \mathbb{N}$ y por lo tanto queda demostrado mi enunciado

PIM Se puede usar para demostrar enunciados de la forma

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Demostración de $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ usando PIM;

1. (Paso base) Demostrar que $1 \in S$

2. (hipótesis de inducción) Sea $n \in S$. Esto es $P(n)$ es cierto.

(Paso inductivo) Demostrar que $n + 1 \in S$

Esto es $P(n+1)$ es cierto.

En el fondo demostramos $(P(n) \Rightarrow P(n + 1))$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ y así $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

es cierto

Ejemplo: Para todo $\frac{n \in \mathbb{N}, n + 3 > 5n^2}{P(n)}$

Dem:

i. (Paso base) $1+3>5 \cdot 1^2$ por lo tanto el enunciado para $n=1$ es cierto

ii. (Hipótesis de inducción) Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}, n + 3 > 5n^2$

(Paso inductivo)

$$(n + 1) + 3 = (n + 3) + 2$$

$$< 5n^2 + 1$$

$$< 5n^2 + 10n + 5$$

$$= 5(n + 1)^2$$

cierto para $n+1$. Por PIM $\forall n \in \mathbb{N}, n + 3 > 5n^2$



Perrito cheems de la suerte para que salgan tus demostraciones

Recordemos que si P y Q son polinomios (en una o mas variables), decimos que P divide a Q si existe otro polinomio R talque $Q=RP$

Lema. Si P divide a Q_1 y a Q_2 entonces P divide a $Q_1 + Q_2$

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x-y$ divide a

$$x^n - y^n$$

Demostración:

- i. $x-y$ divide a $x^1 - y^1 = x-y$ porque $x-y=1(x-y)$. Por lo tanto el enunciado es cierto para $n=1$ (Paso base)
- ii. (Hipótesis de inducción). Sea $n \in \mathbb{N}$ talque $x-y$ divide $x^n - y^n$

Queremos mostrar que $x-y$ divide a $x^{n+1} - y^{n+1}$

(Paso inductivo)

Escribimos

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= xx^n - yy^n \\ &= xx^n - yx^n + yx^n - yy^n \\ &= (x - y)x^n + y(x^n - y^n) \end{aligned}$$

El primer termino claramente es dividido por $x-y$.

El segundo terminó es dividido por $x-y$ por nuestra hipótesis de inducción. Por el lema $x-y$ divide a la suma que es igual a $x^{n+1} - y^{n+1}$.

Por lo tanto $x-y$ divide $x^{n+1} - y^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$



Ejemplo: Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^n (4i - 2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

Dem:

i. (Paso base) Si $n=1$ tenemos

$$\prod_{i=1}^1 (4i - 2) = (4(1) - 2) = 2 \text{ y } \frac{(2(1))!}{1!} = 2! = 2$$

ii. (Hip de inducción) Supongamos que

$$\prod_{i=1}^n (4i - 2) = \frac{(2n)!}{n!} \text{ es cierto para algún } n \in \mathbb{N}$$

(Paso inductivo) Primero trabajamos con el lado izquierdo

$$\prod_{i=1}^{n+1} (4i - 2) = (4(n+1) - 2) \prod_{i=1}^n (4i - 2) = (4n + 2) \frac{(2n)!}{n!} \text{ (pause)}$$

Ahora trabajamos con el lado derecho:

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!} = (4n+2) \frac{(2n)!}{n!}$$

Por lo tanto el enunciado es cierto para $n+1$. Así que el enunciado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$



PRINCIPIO GENERALIZADO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA (PGIM)

Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $S \subseteq \mathbb{N}$ *satisface*

i. $k \in S$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$,

$$n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$$

Entonces S contiene todos los naturales mayores o iguales a k

$$k \in S, k + 1 \in S, k + 2 \in S, \dots$$

Ejemplo:

Demuestre que $n^2 - n - 20 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 5$.

Notemos que el enunciado no es cierto para $n=1$, porque $1^2 - 1 - 20 = -20 < 0$

Dem:

i. (Paso base) Si $n=6$, entonces $6^2 - 6 - 20 = 36 - 26 = 10 > 0$ El enunciado es cierto si $n=6$

ii. (Hip. De ind.) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 - n - 20 > 0$

(Paso ind.)

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - (n + 1) - 20 &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 20 \\&= n^2 + n - 20 \\&= n^2 - n - 20 + 2n\end{aligned}$$

Por hip. De inducción $n^2 - n - 20 > 0$ y $2n > 0$ porque $n > 5$, por tanto $(n + 1)^2 - (n + 1) > 0$

Así que $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 6$ el enunciado es cierto

