Cardinalidad

y

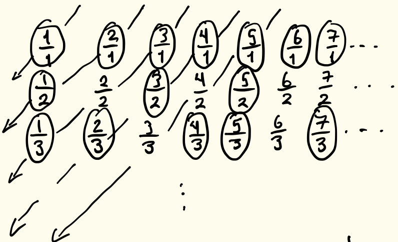
$\mathbb{N}$

Ya sabemos que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ son contables. También tenemos $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, así que uno podría sospechar $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$ o $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|$. Aunque $\mathbb{Q}$ "se ve" más como $\mathbb{R}$ que como $\mathbb{N}$, tenemos el siguiente resultado.

<u>Teorema 5.3.1</u>. El conj. $\mathbb{Q}^+$ de racionales positivos es ∞-numerable.

<u>Dem</u>: Obviamente $\mathbb{Q}^+$ es infinito.

Todo elemento de $\mathbb{Q}$ se puede expresar como $\frac{p}{q}$ para algunos $p,q\in\mathbb{N}$. Así que los elementos de $\mathbb{Q}^+$ se pueden ordenar como sigue:



Donde el n-ésimo renglón contiene a las fracciones con denominador igual a n.

Ahora enlistemos los elementos de $\mathbb{Q}^+$ en el orden indicado por las flechas de la figura arriba. Primero todas las fracciones tales que la suma del numerador y denominador es igual a 2 (sólo $\frac{1}{1}$), después los que suman 3 ($\frac{2}{1}$ y $\frac{1}{2}$), etc.

Algunos racionales aparecen repetidos, por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$. Las repeticiones vienen de fracciones no reducidas, así que borramos estas últimas de la lista. Esta lista contiene a todos los elementos de $\mathbb{Q}^+$. Si nuestra lista se ve como

$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

Definimos $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ como $f(n)=a_n$.

Por construcción f es inyectiva y suprayectiva, por lo tanto $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}^+|$. ∎

La función construida arriba se ve como:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathbb{N}=\{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots\} \\
f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{Q}=\{ & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{4}{1}, & \frac{3}{2}, & \dots\}
\end{array}$$

<u>Teorema 5.3.6</u>. Si A y B son disjuntos e ∞-numerables, entonces $A\cup B$ es ∞-numerable.

<u>Dem</u>: Sean $f:\mathbb{N}\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow A$ y $g:\mathbb{N}\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B$. Defina

$$h(n)=\begin{cases} f\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ g\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

El efecto de h es mandar los naturales impares a A y los naturales pares a B.

<u>Ejercicio</u>: Mostrar que h es biyectiva

Por lo tanto $|\mathbb{N}| = |A\cup B|$ ∎

<u>Teorema 5.3.7</u>. El conjunto $\mathbb{Q}$ es ∞-numerable.

<u>Dem</u>: Primero notemos que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

donde $\mathbb{Q}^-$ es el conjunto de los racionales negativos. La función $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^-$ dada por $f(x)=-x$ es una biyección.

Entonces por Teo 5.3.1. $\mathbb{Q}^-$ es ∞-numerable.
Por thm 5.3.6 $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ es ∞-numerable.
Sea $g: \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. Y defina la función
$h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ como sigue:

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ h(n-1) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

<u>Ejercicio</u>: Verificar que h es biyectiva.

Por lo tanto $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ $\blacksquare$