Funciones invertibles y biyectivas

Definición. Una función $f: A \to B$ es una función biyectiva o una <u>bijección</u> si es inyectiva y suprayectiva. $\blacksquare$

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{p, q, r\}$. La función $h: A \to B$, donde $h(a) = p$, $h(b) = r$, y $h(c) = q$ es una bijección de A a B. $\blacksquare$

Ejemplo: La funcion $d: \mathbb{N} \to E^+$ dada por $d(n) = 2n$ es una biyeción entre los números naturales y el conjunto E^+ de números pares positivos. $\blacksquare$

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $F(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Por ejemplo, $F(1,3) = 2^0(2\cdot 3 - 1) = 5$, $F(3,1) = 2^2(2\cdot 1 - 1) = 4$ y $F(5,5) = 2^4(2\cdot 5 - 1) = 144$. La función F es una biyección.

Dem:

i) Primero demostremos que F es supra. Sea $s \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar $F(m,n) = s$ para algún $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si s es par, entonces s se puede escribir como $2^k t$, donde $k \geq 1$ y t es impar. Como t es impar, $t = 2n - 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Escogiendo $m = k + 1$, tenemos $F(m,n) = 2^{m-1}(2n-1) = 2^k t = s$. Si s es impar, entonces $s = 2n - 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Para estos n y $m = 1$ tenemos $F(m,n) = 2^{1-1}(2n-1) = 2n - 1 = s$. Por lo tanto F es suprayectiva.

F is onto $\mathbb{N}$.

ii) Ahora mostremos que F es inyectiva. Suponga $(m,n), (r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $F(m,n) = F(r,s)$. Primero demostremos que $m = r$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m \geq r$. Como $F(m,n) = F(r,s)$ tenemos $2^{m-1}(2n-1) = 2^{r-1}(2s-1)$ que implica $2^{m-r}(2n-1) = 2s - 1$. Como el lado derecho de la igualdad es impar, el lado izquierdo también es impar. Luego $2^{m-r} = 1$. Así que $m - r = 0$ y $m = r$.

Dividiendo ambos lados por $2^{m-1}(2n-1) = 2^{r-1}(2s-1)$ como $2^{m-1} = 2^{r-1}$, tenemos $2n - 1 = 2s - 1$, que implica $2n = 2s$, así que $n = s$. Luego $m = r$ y $n = s$, concluimos $(m,n) = (r,s)$. Así que F es inyectiva y por lo tanto biyectiva. $\blacksquare$

Teorema 4.4.1. Si $f: A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ y $g: B \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$, entonces $g \circ f: A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$.

Dem: Como composición de inyectivas es inyectiva y composición de suprayectivas es suprayectiva, el teorema se sigue. $\blacksquare$

Ejemplo: Sean d y F las funciones definidas en ejemplos previos. Entonces la función $d \circ F$ es una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a E^+. $\blacksquare$

Teorema 4.4.2. Sea $F: A \to B$.

a) F^{-1} es una función de $Rng(F)$ a A sii F es inyectiva.

b) Si F^{-1} es una función, entonces F^{-1} es biyectiva.

Dem: a) Suponga que F^{-1} es una función de $Rng(F)$ a A. Suponga $F(x) = F(y) = z$. Entonces $(x,y) \in F$ y $(y,z) \in F$. Por lo tanto

$(z,x) \in F^{-1}$ y $(z,y) \in F^{-1}$. Como F^{-1} es una función, $x=y$. luego F es inyectiva.

Suponga que F es inyectiva. Sean $(x,y) \in F^{-1}$ y $(x,z) \in F^{-1}$. Therefore $(y,x) \in F$ and $(z,x) \in F$. Como F es inyectiva, $y=z$. Así que F^{-1} es una función.

b) Ejercicio. $\blacksquare$

<u>Ejemplo:</u> La función trigonométrica $\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ claramente no es iny. porque, por ejemplo, $\text{sen}(0) = \text{sen}(2\pi) = 0$. Sin embargo, la restricción $\text{Sin}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ es iny. y tiene rango $[-1,1]$. Por teo 4.2.2 seno tiene una función inversa $\text{Sin}^{-1}\ [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\blacksquare$

<u>Corolario 4.4.3</u>. Si $F: A \longrightarrow B$ es biyectiva, entonces $F^{-1}: B \longrightarrow A$ es biyectiva

<u>Teorema 4.4.4</u>. Sean $F: A \to B$ y $G: B \to A$. Entonces

a) $G = F^{-1} \Longleftrightarrow G \circ F = I_A$ y $F \circ G = I_B$.

b) Si F es biyectiva, entonces $G = F^{-1} \Longleftrightarrow$
$G \circ F = I_A$ o $F \circ G = I_B$.

<u>Dem</u>: a) Si $G = F^{-1}$, entonces $G \circ F = I_A$ y $F \circ G = I_B$ por Teo. 4.2.3.

Supongamos ahora que $G \circ F = I_A$ y $F \circ G = I_B$. Entonces F es iny por teo 4.3.4 y F es supra por teo 4.3.2. Así que F^{-1} es una función en B y $F^{-1} = F^{-1} \circ I_B = F^{-1} \circ (F \circ G) = (F^{-1} \circ F) \circ G = I_A \circ G = G$.

b) Ejercicio. $\blacksquare$

Otra forma de leer el teo. 4.4.4 es que explica lo que la inversa de una función le hace a la otra. Lo que sea que la función F hace a x, cuando aplicamos la inversa a $F(x)$ nos lleva de regreso a x.

<u>Ejemplo</u>: La función
$$H(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
es inyectiva y supra. Muestre que $H^{-1} = K$, donde
$$K(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ \sqrt{2-x} & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

<u>Dem</u>: Consideramos dos casos. Si $x \leq 0$ $(K \circ H)(x) = K(H(x)) = K(x^2+2)$. Como $x^2+2 \geq 2$, el valor de K es $-\sqrt{(x^2+2)-2} = \sqrt{x^2} = -|x| = x$. cuando $x \leq 0$. Si $x > 0$, $(K \circ H)(x) = K(H(x)) = K(2-x^2)$. Como $2 - x^2 < 2$, el valor de K es $\sqrt{2-(2-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$ si $x > 0$. En cualquier caso, $(K \circ H)(x) = x$, así que $K = H^{-1}$.

<u>Ejemplo</u>: Sean $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones donde $F(x) = 2x+1$ y $G(x) = \frac{x-1}{2}$. Podemos mostrar que F (y lo mismo para G) es biyectiva mostrando que son inversas una de la otra.

<u>Dem</u>: Calculamos las dos composiciones:
$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$
$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$$ $\blacksquare$