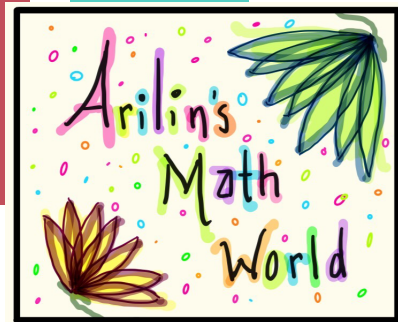
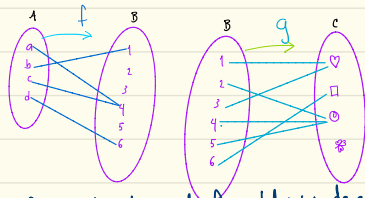


Composición de funciones y función inversa

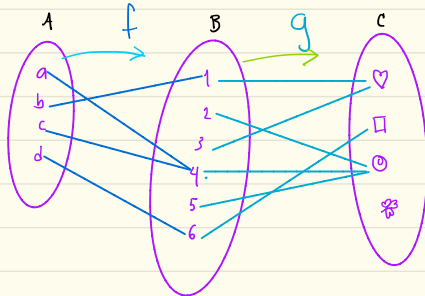


Definición: Sean A, B y C conjuntos y sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones. Definimos la composición de las funciones f y g como la función $g \circ f: A \rightarrow C$ cuya regla de asignación es $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Ejemplo: Consideremos f y g como a continuación:



Como el codominio de f y el dominio de g son iguales es posible hacer la composición $g \circ f$



$$\begin{aligned} g \circ f(a) &= \odot \\ g \circ f(b) &= \heartsuit \\ g \circ f(c) &= \square \\ g \circ f(d) &= \otimes \end{aligned}$$

$g \circ f: A \rightarrow C$, ¿Es función?

i) ¿Esta definida para todo el dominio?

Sea $a \in A \rightarrow f(a) \in B \rightarrow g(f(a)) \in C$.

ii) ¿Cada elemento del dominio tiene una única imagen bajo $g \circ f$?

Sea $a \in A$

- $\rightarrow \exists! b \in B \mid f(a) = b$
- $\rightarrow \exists! c \in C \mid g(b) = c$
- $\rightarrow \exists! c \in C \mid g(f(a)) = c$

Más ejemplos de

composición de funciones $\circ \rightarrow$

+ Ejemplos de Composición de funciones

① Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto x+1$

$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
 $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
 $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

En general $g \circ f \neq f \circ g$.



② Sean $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x$ $x \mapsto \frac{x}{2}$

$g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
 $g(f(x)) = g(2x) = \frac{2x}{2} = x$

función
inclusion

Si quisiera hacer $f \circ g$ $\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

No funciona,

$-3 \in \mathbb{Z} = \text{Dom}(g)$ pero $g(-3) = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} = \text{dom}(f)$

con que esas
tenemos...



Función identidad, función inclusión y función restricción

Definición. Sea A un conjunto. Definimos la función identidad en A como $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ cuya regla de asignación es $\text{Id}_A(a) = a \quad \forall a \in A$.

Definición: Sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Llamamos función inclusión a la función $i: A \rightarrow B$ tal que $i(a) = a \quad \forall a \in A$.

Definición. Sea $f: A \rightarrow B$ una función y sea $C \subseteq A$. Definimos la función restricción de f en C como la función $f|_C: C \rightarrow B$, tal que $\forall x \in C, f|_C(x) = f(x)$.

Función inversa

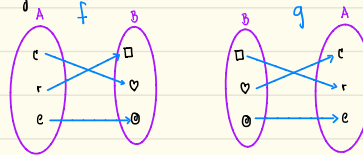
Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Decimos que una función $g: B \rightarrow A$ es la inversa de f si y solo si:

i) $g \circ f = Id_A$

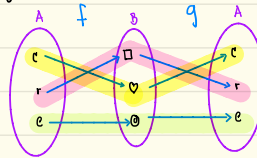
ii) $f \circ g = Id_B$



Ejemplo 1. Considere las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ como sigue



i) $g \circ f: A \rightarrow A$



$$g \circ f(c) = c$$

$$g \circ f(r) = r$$

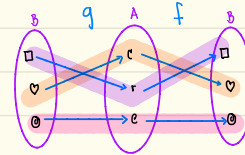
$$g \circ f(e) = e$$

$$g \circ f(x) = x$$

$$\forall x \in A$$

$$g \circ f = Id_A$$

ii) $f \circ g: B \rightarrow B$



$$f \circ g(\square) = \square$$

$$f \circ g(\heartsuit) = \heartsuit$$

$$f \circ g(\odot) = \odot$$

$$f \circ g(x) = x$$

$$\forall x \in B$$

$$f \circ g = Id_B$$

Como se cumplen i) y ii) g es inversa de f .
(y viceversa)

Ejemplo 2

Consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2x-1$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x+1}{2}$

Queremos ver que g es inversa de f .

Demostración:

i) $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{(2x-1)+1}{2} \\ &= \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

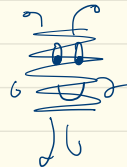
$$g \circ f(x) = x \rightarrow g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

ii) $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = 2g(x)-1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1 \\ &= (x+1)-1 = x+1-1 = x \end{aligned}$$

$$f \circ g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$$

Como se cumplen i) y ii) g es inversa de f .
(y viceversa)





Teorema.

Sea $f: A \rightarrow B$ tal que existe una función $g: B \rightarrow A$ inversa de f . Entonces la función inversa es única. Llamaremos f^{-1} a la función inversa de f .

Diremos que una función es invertible si tiene función inversa.

Dem.

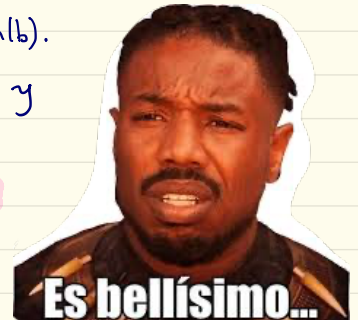
Supongamos que la función inversa no es única. Es decir, existen funciones $g \neq h$, $g, h: B \rightarrow A$ tales que g y h son función inversa de f . Entonces $g \circ f = Id_A$, $f \circ g = Id_B$, $h \circ f = Id_A$ y $f \circ h = Id_B$.

Sea $b \in B \rightarrow$

$$g(b) = g(f \circ h(b)) = g(f(h(b))) = g \circ f(h(b)) = Id_A(h(b)) = h(b).$$

Así que como h y g tienen mismo dominio, mismo codominio y misma regla de asignación. Entonces $h = g$.

$\therefore$ La función inversa es única.



Obs. Sea $f: A \rightarrow B$ una función invertible. Entonces:

1) f^{-1} también es invertible

2) $f = (f^{-1})^{-1}$

Dem.

1) Notemos que f es la función inversa de f^{-1} ,
pues $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$.

2) $(f^{-1})^{-1}$ es la función inversa de f^{-1} . Sin embargo
 f también es una función inversa de f^{-1} . inciso anterior
Como la función inversa es única
entonces $f = (f^{-1})^{-1}$ teorema anterior

✚ Imágenes creadas con Bitmoji.

✚ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

✚ Recuerda visitar:
* mi canal Arilin's Math y
* mi grupo de Facebook
Arlin's Math World.

