

Imagen y preimagen de una función



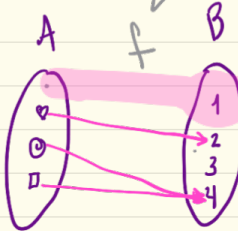
Imagen y preimagen de un elemento

Definición. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Escribimos $y = f(x)$ cuando $(x, y) \in f$. Decimos que y es la imagen de f en x y que x es preimagen de y bajo f .

① Cada elemento $x \in A$ tiene una única imagen $y \in B$.

② Los elementos $y \in B$ pueden tener, 0, 1 o mas preimágenes $x \in A$.

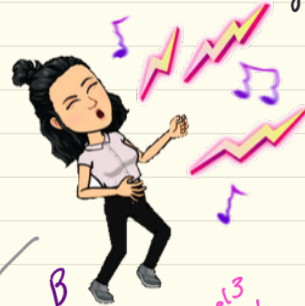
Ejemplo



- El 1 $\notin$ Im no tiene preimagen
- La preimagen de 1 y 3 es el conjunto $\emptyset$

$\heartsuit$ es preimagen de 2 $f(\heartsuit) = 2$. 2 es imagen de f en x .
La imagen de $\heartsuit$ es 2.

@ y $\square$ son preimagen de 4 bajo f . $f(@) = f(\square) = 4$. 4 es imagen de f en @ y $\square$.





Ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 5$$

$$f(x) = 5$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Imagen

5 es imagen de x , para toda $x \in \mathbb{R}$

Preimagen

- * El conjunto $\mathbb{R}$ es la preimagen de 5 bajo f
- * Para cualquier $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq 5$.
El conjunto vacío es la preimagen de y .

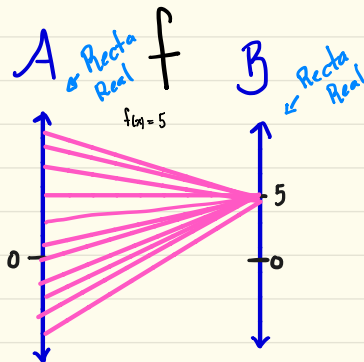


Imagen de un conjunto. Sea $f: A \rightarrow B$ una función.

$$\text{Si } C \subseteq A \Rightarrow f(C) = \{f(c) \mid c \in C\}$$

Imagen de una función

Definición. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Definimos la imagen de la función f como:

$$\text{Im}(f) = \{ y \in B \mid \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y \}$$

Imagen de un conjunto. Sea $f: A \rightarrow B$ una función.
 $S: C \subseteq A \Rightarrow f(C) = \text{Im}(C) = \{ f(c) \mid c \in C \}$

Ejemplos:

Considere las siguientes funciones:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f(x) = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 2x = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid y = 2x \text{ para algún } x \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ 2x \mid x \in \mathbb{Z} \} \\ &= \text{Conjunto de números pares} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } C = \{0, 1, 2\} \Rightarrow f(C) &= \{ f(c) \mid c \in C \} = \{ f(c) \mid c \in \{0, 1, 2\} \} \\ &= \{ f(0), f(1), f(2) \} = \{ 2(0), 2(1), 2(2) \} \\ &= \{0, 2, 4\} \end{aligned}$$

ii) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1] \text{ tal que } f(x) = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1] \text{ tal que } 2x = y \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid y = 2x \text{ para algún } x \in [0, 1] \} \\ &= \{ 2x \mid x \in [0, 1] \} \\ &= [0, 2] \end{aligned}$$

$$\text{Para } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x \quad [0, 2] = \text{Im}(f)$$

Demostración

$\subseteq$
Sea $y \in [0, 2]$. Entonces $0 \leq y \leq 2$. Luego,
 $0 \leq \frac{y}{2} \leq 1$. Consideremos $x = \frac{y}{2}$,
entonces $x \in [0, 1]$ y $f(x) = 2x = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$
 $\Rightarrow y \in \text{Im}(f) \therefore [0, 2] \subseteq \text{Im}(f)$

$\supseteq$
Sea $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2$.
Como $f(x) = 2x \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow$
 $f(x) \in [0, 2] \therefore \text{Im}(f) \subseteq [0, 2]$

Preimagen de un conjunto bajo una función

Definición. Sean $f: A \rightarrow B$ una función y $D \subseteq B$. Definimos

la **preimagen de D bajo f** como:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Ejemplos:

Considere las siguientes funciones:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{R}^+) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } f(x) = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = y \text{ p.a. } y \in \mathbb{R}^+\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = y \text{ p.a. } y \in \mathbb{R}^+\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ii) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$

$$f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = y \text{ p.a. } y \in \mathbb{R}^-\} = \emptyset$$

Dem.

Supongamos que $f^{-1}(\mathbb{R}^-) \neq \emptyset$. Sea $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^-) \rightarrow x \in [0, 1]$ y $f(x) \in \mathbb{R}^- \rightarrow 2x \in \mathbb{R}^- \rightarrow x \in \mathbb{R}^-$  x no puede pertenecer a $[0, 1]$ y a $\mathbb{R}^-$ ^{$\notin \text{Dom}(f)$}

$\therefore f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$

Notemos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(D) &= \{x \in A \mid \exists y \in D \text{ tal que } f(x) = y\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) = y \text{ p.a. } y \in D\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in D\} \end{aligned}$$

Dicho más fácil:

Un elemento $x \in A$ pertenece a $f^{-1}(D)$

sii $f(x) \in D$.



+ Imágenes creadas con Bitmoji.

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

+ Recuerda visitar:
* mi canal Arilin's Math y
* mi grupo de Facebook
Arilin's Math World.

