Tarea 2
Álgebra Superior I

Agosto de 2020

Esta es una tarea de 100 puntos. Cada ejercicio tiene marcado su valor. Si la respuesta es correcta y completa tendrás el total de puntos. En caso de estar incompleto o incorrecto, se asignará los puntos proporcionales a la parte correcta de la respuesta. La entrega de cada ejercicio se deberá hacer por separado en el trabajo de clase correspondiente.

Quienes estén de oyentes deberán agregar a cada entrega la leyenda “Estoy de oyente”. De la misma manera, los alumnos que sí están inscritos en el curso deberán agregar el mensaje “Soy alumno inscrito”.

Ejercicio 1. *(20 puntos) Demuestra la siguiente proposición: Para cualesquiera conjuntos A, B, C, D tenemos:*

1. *Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cup B \subseteq C \cup D$.*

   Demostración. Por hipótesis, sabemos que $A \subseteq C$ y que $B \subseteq D$, entonces podemos suponer que existe un x tal que $x \in A \cup B$, entonces:

   $$x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

   Por las hipótesis de contención, esto implica que:

   $$(x \in C) \vee (x \in D) \Rightarrow x \in C \cup D$$

   □

2. *$A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ si y sólo si $A \cup B \subseteq C$.*

   Demostración. $\Rightarrow$) La hipótesis nos dice que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces podemos tomar $x \in A \cup B$, de forma que:

   $$x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

Y por la hipótesis de contención:

$$(x \in C) \vee (x \in C) \Rightarrow x \in C \cup C = C$$

Aquí podemos asegurar que $x \in A \cup B$ para todo x en tal unión,y así, $x \in C$, por lo tanto, $A \cup B \subseteq C$.

$\Leftarrow$) Ahora, la hipótesis es que $A \cup B \subseteq C$, entonces aquí podríamos hacer dos casos: uno en que x esté en A y otro en que x esté en B. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$$

Por lo tanto, como esto pasa para toda x en A, tenemos que $A \subseteq C$.
Por otro lado, si queremos tomar a algún x en B, el procedimiento es exactamente análogo, por lo que $B \subseteq C$.

$\square$

Ejercicio 2. *(20 puntos) Demuestra la siguiente proposición:*
Para cualesquiera conjuntos A, B, C se tiene $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Demostración. Sean A, B, C conjuntos. Para demostrar que $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, procederemos por doble contención.

$\subseteq$) Sea $x \in A \cap (B \triangle C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B \triangle C$ por definición de la intersección, por lo que, $x \in A$ y ($x \in B - C$ o $x \in C - B$) por la definiciones de diferencia simétrica y unión. Ahora, como la conjunción distribuye sobre la disyunción tenemos que ($x \in A$ y $x \in B - C$) o ($x \in A$ y $x \in C - B$).
Por lo que tenemos 2 posibles casos:

1 Si $x \in A$ y $x \in B - C$, entonces $x \in A$, $x \in B$ y $x \notin C$, por lo que $x \in A \cap B$. Ahora, como $x \notin C$, tenemos que $x \notin A \cap C$, pues $A \cap C \subseteq C$, por lo que $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$ por definición de diferencia. Además $(A \cap B) - (A \cap C) \subseteq ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B)) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, por lo que $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2 Si $x \in A$ y $x \in C - B$, entonces $x \in A$, $x \in C$ y $x \notin B$, por lo que $x \in A \cap C$. Ahora, como $x \notin B$, tenemos que $x \notin A \cap B$, pues $A \cap B \subseteq B$, por lo que $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$ por definición de diferencia. Además $(A \cap C) - (A \cap B) \subseteq ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B)) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, por lo que $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Entonces, como son todos los casos posibles, tenemos que $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
Por lo tanto $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

$\supseteq$) Sea $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Entonces $x \in ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup (A \cap C) - (A \cap B))$ por definición de diferencia simétrica, por lo que $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$

o $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$. Entonces tenemos dos casos:

1 Si $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$, entonces $x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap C$ por definición de diferencia, por lo que $x \in A$, $x \in B$ y $x \notin A \cap C$ por la definición de intersección.
Por otro lado, si $x \in C$, como $x \in A$, tenemos que $x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap C$ por hipótesis, lo que es una contradicción. Por lo que $x \notin C$.
Entonces $x \in A$, $x \in B$ y $x \notin C$, lo que implica que $x \in A$ y $x \in B - C$ por definición de diferencia. Además $B - C \subseteq B \triangle C$, por lo que $x \in A$ y $x \in B \triangle C$. Por lo tanto $x \in A \cap (B \triangle C)$, por definición de intersección.

2 Si $x \in (A \cap C) - (A \cap B)$, entonces $x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap B$ por definición de diferencia, por lo que $x \in A$, $x \in C$ y $x \notin A \cap B$ por definición de intersección.
Por otro lado, si $x \in B$, como $x \in A$, tenemos que $x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap B$ por hipótesis, lo que es una contradicción. Por lo que $x \notin B$.
Entonces $x \in A$, $x \in C$ y $x \notin B$, lo que implica que $x \in A$ y $x \in C - B$ por definición de diferencia. Además $C - B \subseteq B \triangle C$, por lo que $x \in A$ y $x \in B \triangle C$. Por lo tanto $x \in A \cap (B \triangle C)$, por definición de intersección.

Entonces, como son todos los casos posibles, tenemos que $x \in A \cap (B \triangle C)$.
Por lo tanto $A \cap (B \triangle C) \supseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, lo que concluye la demostración.

$\square$

Ejercicio 3. *(20 puntos)Sean* $A = \mathbb{R}$*,* $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$*,* $C = \{\pi\}$ *y* $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$*. Encuentra:*

i) $A \cup B$.

ii) $A \cap B$.

iii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

iv) $A \cup (C \cap D)$.

v) $A \cap (C \cup B)$.

vi) $(A \cup B) - (C \cap D)$

Solución:

i) $A \cup B = A = \mathbb{R}$ ya que $B \subset A$ (los reales con 0,2,4,6 y 8 no son mas que los reales por si mismos).

ii) $A \cap B = B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ya que $B \subset A$ (como 0,2,4,6,8 números naturales, particularmente son reales).

iii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (B \cup C) = \{0, 2, \pi, 4, 6, 8\}$. La primer igualdad es consecuencia de que tanto B, C son subconjuntos de A y la segunda es la definición de unión.

iv) $A \cup (C \cap D) = A = \mathbb{R}$. Como tanto C, D son subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $C \cap D$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y como en los casos anteriores, al unir esto con un conjunto que lo contiene, el resultado es el conjunto que lo contiene.

v) $A \cap (C \cup B) = C \cup B = \{0, 2, \pi, 4, 6, 8\}$. Notemos que $C \cup B$ es un subconjunto de $A = \mathbb{R}$, por lo que basta con calcular $C \cup B$ como en un inciso pasado.

vi) $(A \cup B) - (C \cap D)$=$A - \emptyset = A = \mathbb{R}$. $(A \cup B) = A = \mathbb{R}$ ya que $B \subset A$ y $C \cap D = \emptyset$ ya que C y D no comparten elementos. La última igualdad es $\mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$ ya que para cualquier conjunto, si le quitamos el vacio, nos queda el mismo conjunto.

Ejercicio 4. *(20 puntos) Demuestra la siguiente proposición: Sean A, B, C conjuntos entonces $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.*

Solución: Para este ejercicio queremos demostrar que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, para esto vamos a demostrar que:

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$$

y que:

$$A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

$\subseteq$) Para esta contención: Sea $(r, s) \in A \times (B \cup C)$, queremos ver que $(r, s) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Por definición de producto cartesiano se tiene que $r \in A$ y $s \in B \cup C$. Por de definición de unión de dos conjuntos se sigue que $r \in A$ y ($s \in B$ ó $s \in C$). Como tenemos que $s \in B$ ó $s \in C$:

i) Si $s \in B$, entonces $(r, s) \in A \times B$. Luego se cumple que $(r, s) \in A \times B$ ó $(r, s) \in A \times C$ (porque eso verdadero cuando alguna de las dos es verdadera y se cumple que $(r, s) \in A \times B$). De esta forma, tenemos que $(r, s) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

ii) Si $s \in C$, entonces $(r, s) \in A \times C$. Luego se cumple que $(r, s) \in A \times B$ ó $(r, s) \in A \times C$ (porque eso verdadero cuando alguna de las dos es verdadera y se cumple que $(r, s) \in A \times C$). De esta forma, tenemos que $(r, s) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Por lo tanto, sin importar que pase *i)* ó *ii)* se tiene que $(r, s) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ y por tanto $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

$\supseteq$) Para esta contención: Sea $(r, s) \in (A \times B) \cup (A \times C)$, deseamos mostrar que $(r, s) \in A \times (B \cup C)$.

Por definición de unión de dos conjuntos tenemos que $(r, s) \in A \times B$ ó $(r, s) \in A \times C$:

i) Si $(r,s) \in A \times B$, entonces por definición de producto cartesiano se sigue que $r \in A$ y $s \in B$. Como $s \in B$, se sigue que $s \in B \cup C$ (para que un elemento esté en una unión de conjuntos, basta con que esté en alguno de los dos). Como $r \in A$ y $s \in B \cup C$, usando la definición de producto cartesiano tenemos que: $(r,s) \in A \times (B \cup C)$.

ii) Si $(r,s) \in A \times C$, entonces por definición de producto cartesiano se sigue que $r \in A$ y $s \in C$. Como $s \in C$, se sigue que $s \in B \cup C$ (para que un elemento esté en una unión de conjuntos, basta con que esté en alguno de los dos). Como $r \in A$ y $s \in B \cup C$, usando la definición de producto cartesiano tenemos que: $(r,s) \in A \times (B \cup C)$.

Por lo tanto, sin importar que pase *i)* ó *ii)* se tiene que $(r,s) \in A \times (B \cup C)$ y por tanto $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

Por $\subseteq$) y $\supseteq$) llegamos a que

$$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$$

como se requería.

Solución alterna: Recordemos que por un teorema en las notas 1.4 del curso, tenemos la siguiente propiedad de distributividad para las proposiciones P, Q y R:

$$P \wedge (Q \vee R) \text{ es equivalente a } (P \wedge Q) \vee (P \wedge R). \tag{1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \cup C\} \\ &= \{(x,y) \mid x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)\} \\ &= \{(x,y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)\} \\ &= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C\} \\ &= \{(x,y) \mid (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Donde, la primera igualdad se satisface por la definición de producto cartesiano. La segunda igualdad se satisface por la definición de unión de dos conjuntos. La tercera igualdad se satisface por (1), donde $P = x \in A$, $Q = y \in B$ y $R = y \in C$. La cuarta igualdad se da por la definición de producto cartesiano. La quinta igualdad se satisface por la definición de unión de dos conjuntos. Y la última igualdad se cumple por la definición de producto cartesiano.
De esta forma, tenemos lo que se desea: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Ejercicio 5. *(20 puntos).*

1. *Definimos que un una relación R en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ como sigue: Sea $(m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$, m esta relacionado con n si m divide a n. Encuentre la relación inversa R^{-1} y determine el dominio y codominio.*

2. Definimos una relación en el plano $\mathbb{R}^2$ como sigue: dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) del plano están relacionados si $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$. Verifique que esta relación es una relación de equivalencia.

Solución:

1. Por definición

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(s,t)|(t,s) \in R\} \\ &= \{(s,t)|t \in \mathbb{Z}^+, s \in \mathbb{Z} \text{ y } t|s\} \\ &= \{(s,t)|s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}^+, \text{ y } t|s\} \end{aligned} \tag{2}$$

   Vamos a mostrar que el domonio de R^{-1} es $\mathbb{Z}$. Primero mostremos que $\mathbb{Z}$ es subconjunto del dominio de R. Sea $l \in \mathbb{Z}$. Notemos que $(l, 1) \in R^{-1}$ porque $(1, l) \in R$, así l esta en el dominio. La otra contención es por definición de R^{-1}.

   $R^{-1} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ entonces, tenemos por definición que el codominio de R^{-1} es $\mathbb{Z}^+$.

2. Ahora verifiquemos las condiciones de relación de equivalencia:

   a) Reflexividad. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $y - x^2 = y - x^2$, así (x, y) esta relacionado consigo mismo.

   b) Simetría. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que (x_1, y_1) esta relacionado con (x_2, y_2), es decir, $y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2$. Puesto que $y_2 - x_2^2 = y_1 - x_1^2$ tenemos por definición de la relación que (x_2, y_2) esta relacionado con (x_1, y_1).

   c) Transitividad. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ tal que (x_1, y_1) esta relacionado con (x_2, y_2) y (x_2, y_2) esta relacionado con (x_3, y_3), es decir, $y_1 - x_1^2 = y_2 - x_2^2$ y $y_2 - x_2^2 = y_3 - x_3^2$. De la transitividad de la igualdad tenemos que $y_1 - x_1^2 = y_3 - x_3^2$, así (x_1, y_1) esta relacionado con (x_3, y_3).

   Por lo tanto la relación es una relación de equivalencia.