Lista de Ejercicios: Conjuntos y Relaciones

Unidad 2. Álgebra Súperior 1

Profesores: Arilín Haro y Luis Jorge Sánchez Saldaña.
Selección de ejercicios hecha por Brenda Navarro.

A continuación encontrarán una lista de ejercicios sugeridos para que practiquen el contenido de esta unidad. Como verán, están separados por temas para que los vayan resolviendo de acuerdo al avance con las notas y los vídeos.

Conjuntos y Relaciones

Conjuntos, Subconjuntos igualdad de conjuntos

Ejercicio 1. *Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$, entonces $A = B$ y $B = C$.*

Ejercicio 2. *Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$. ¿Cuáles son todos los subconjuntos de A con dos elementos?.*

Ejercicio 3. *Da ejemplos de conjuntos A, B y C tales que:*

i) $A \subseteq B$, $B \nsubseteq C$ *y* $A \subseteq C$

ii) $B \subseteq C$, $B \nsubseteq A$ *y* $C \nsubseteq A$.

Ejercicio 4. *Sea $X = \{1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$.*

i) Determina todos los subconjuntos A de X tales que: $\{1\} \subseteq A$ *y* $\{1\} \in A$.

ii) Determina todos los subconjuntos B de X tales que: $2 \notin B$ *y* $\{1, 2\} \in B$.

iii) Determina todos los subconjuntos C de X tales que: $\{1, 2\} \subsetneq C$.

iv) Determina todos los subconjuntos D de X tales que: $\{1, 2\} \notin D$ *y* $\{1\} \in D$.

Ejercicio 5. *Demuestre que $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.*

Operaciones con conjuntos: Unión, intersección, diferencia y complemento

Ejercicio 6. *Sean* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ *y* $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Encuentra:*

i) $A \cup B$.

ii) $A \cap B$.

iii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

iv) $A \cup (C \cap D)$.

v) $A \cap (C \cup B)$.

vi) $(A \cup B) - (C \cap D)$

Ejercicio 7. *Da un ejemplo de conjuntos no vacíos* A, B *y* C *tales que:*

i) $C \subseteq A \cup B$ *y* $A \cap B \nsubseteq C$.

ii) $A \cup B \subseteq C$ *y* $C \nsubseteq B$.

iii) $A \nsubseteq B \cup C$, $B \nsubseteq A \cup C$ *y* $C \subseteq A \cup B$.

Ejercicio 8. *Sean* A, B *y* C *conjuntos. Demuestra que si* $A \subseteq B \cup C$ *y* $A \cap B = \emptyset$, *entonces* $A \subseteq C$.

Ejercicio 9. *Sean* A, B *y* C *conjuntos. Demuestra que* $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Ejercicio 10. *Sean* A, B, C *y* D *conjuntos. Demuestra que si* $A \cup B \subseteq C \cup D$, $A \cap B = \emptyset$ *y* $C \subseteq A$, *entonces* $B \subseteq D$.

Conjunto potencia, producto cartesiano y Familias de conjuntos

Ejercicio 11. *Considere los conjuntos* $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$*,* $B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ *y* $C = \{a, b, c, d, \}$ *y* $\mathcal{P}(A)$*,* $\mathcal{P}(B)$ *y* $\mathcal{P}(C)$ *sus respectivos conjuntos potencia.*

i) Escriba $\mathcal{P}(A)$ *y* $\mathcal{P}(C)$*.*

ii) Calcula $A \times B$ *y* $B \times A$*.*

iii) Calcula $A \times C$ *y* $C \times A$*.*

Ejercicio 12. *Sean* A *y* B *conjuntos no vacíos. Demuestra que* $A \times B = B \times A$ *si y sólo si* $A = B$*.*

Ejercicio 13. *Sean* A *y* B *conjuntos y* $\mathcal{P}(A)$*,* $\mathcal{P}(B)$ *sus respectivos conjuntos potencia. Demuestre que* $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$*.*

Ejercicio 14. *Sean* A *y* B *conjuntos y* $\mathcal{P}(A)$*,* $\mathcal{P}(B)$ *sus respectivos conjuntos potencia. Demuestre que* $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$*. Además muestra un ejemplo donde no se cumple la igualdad.*

Ejercicio 15. *Sean* A*,* B*,* C *y* D *conjutos. Demuestre que* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$*.*

Relaciones: Dominio, Codominio, Imagen y Composición

Ejercicio 16. *Considera las siguientes relaciones definidas en el conjunto* $X = \{1, 2, 5, 6, 7\}$*:*

i) $r = \{(1,1), (2,2), (2,5), (6,6), (7,5)\}$

ii) $s = \{(7,7), (7,6), (7,1)\}$

iii) $X \times \emptyset$

iv) $t = \{(1,1), (2,2), (5,5), (6,6), (7,7)\}$

v) $X \times X$

Encuentra el dominio e imagen de cada relación.

Ejercicio 17. *Sean* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b, c\}$.

i) Encuentra las relaciones R *de* A *a* B *tales que* $Dom(R) = A$ *y* $Im(R) = \{c\}$.

ii) Encuentra las relaciones R *de* A *a* B *tales que* $(1, c) \in R$ *y* $(1, a), (3, b) \notin R$.

iii) Encuentra las relaciones R *de* A *a* B *tales que* $Im(R) = \emptyset$.

iv) Encuentra las relaciones R *de* A *a* B *tales que* $2 \notin Dom(R)$ *y* $a \notin Im(R)$.

Ejercicio 18. *Para las siguientes relaciones de* $A = \{-3, -1, 0, 1, 4, 9\}$ *en* $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, encuentra su dominio e imagen.*

i) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$.

ii) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid x \neq y\}$.

iii) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y \leq x\}$.

iv) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 + y^2 \leq 10\}$.

v) $U = \{(x, y) \in A \times B \mid y + 2x = 4\}$.

Ejercicio 19. *Sea* $A = \{a, b, c\}$ *y sean* R *y* S *las relaciones de* A *en* A *dadas por* $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$ *y* $S = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, c)\}$*. Encuentra*

$$i) R \cup S, \quad ii) R \cap S, \quad iii) R \circ S \ y \quad iv) S \circ S.$$

Ejercicio 20. *Sean* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*,* $B = \{6, 7, 8, 9\}$*,* $C = \{a, b, c, d\}$ *y* $D = \{e, f, g, h\}$*. Sean* $R \subseteq A \times B$*,* $S \subseteq B \times C$ *y* $T \subseteq C \times D$ *definidas por*

$$R = \{(1,7), (4,6), (5,6), (2,8)\}, \quad S = \{(6,a), (6,b), (7,a), (8,d)\} \ y$$

$$T = \{(b,f), (a,f), (d,h), (c,e), (d,g)\}$$

Encuentra: $T \circ S$*,* $S \circ R$ *y* $T \circ (S \circ R)$.