Conjuntos

Relaciones

Arilin's Math World

Relaciones

Definición.

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que R es una relación entre A y B, si R es un subconjunto de AxB. Si (a,b) es un elemento de R, diremos que a está relacionado con b, lo podemos denotar como aRb.

Ejemplos :

1) Sea $A = \{\triangle, \square, ⬠, \ldots\}$ el conjunto de polígonos.
Podemos definir una relación entre A y $\mathbb{N}$ relacionando a cada elemento de A con su número de lados.

Tendríamos por ejemplo que

$(\triangle,3)\in R$ o bien $\triangle R 3$.

$(\square,4)\in R$ $\square R 4$

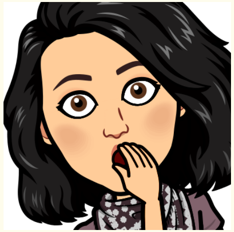
$(⬠,5)\in R$ $⬠ R 5$.

y así y así

2) Sean $A=\{0,1\}$, $B=\{a,b,c\}$ y $R=\{(0,a),(1,b),(0,c)\}\subseteq A\times B$ una relación entre A y B.
En este caso $0Ra$, $1Rb$ y $0Rc$.

3) Sean $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{0,1,2\}$ y relacionamos a con b, aRb, si $a<b$.

Calcula R



$$R=\{(1,2)\}$$

es la única pareja $(a,b)\in A\times B$ que cumple $a<b$

4) Considere $R\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que aRb si y sólo si existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que $a=b+10n$.

a) Escriba 5 parejas (a,b) que pertenezcan a R.

$(1,11)$, $(1,21)$, $(1,31)$, $(1,1)$ y $(2,12)$

$1=11+(10)(-1)$

$1=21+(10)(-2)$

$1=1+(10)(0)$

$2=12+10(-1)$

b) ¿Con quien se relaciona el número 8?

$(8,8)$, $(8,18)$, $(8,-2)$, $(8,-12)$ ...

8 se relaciona con todos los naturales que terminan en 8 y con todos los enteros negativos que terminan en 2.

$8=b+10(1)$

$8=b+10$

$b=8-10=-2$

c) ¿Con cuántos elementos se relaciona el 3?

Se relaciona con todos los naturales que terminan en 3 y con todos los enteros negativos que terminan en 7. Con esto en mente podemos decir que se relaciona con muchos, ¿qué tan muchos? con una infinidad.

5) Sea $A=\{a \mid a \text{ es un animal}\}$ y $B=\{b \mid b \text{ es ecosistema}\}$.

Conjunto de animales

Conjunto de ecosistemas.

Definimos la relación $R \subseteq A \times B$ emparejando a cada animal con su habitat natural.

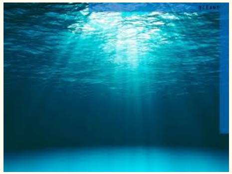
Así, por ejemplo (León, Sábana), (Tigre, Selva), (Tiburón, Oceano), ..., $\in R$

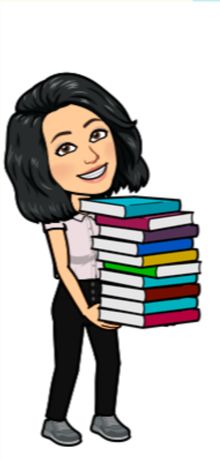
León R Sábana   Tigre R Selva   Tiburón R Oceano.

Podríamos, reciprocamente definir una relación $\mathcal{L}$ entre B y A emparejando un ecosistema con sus animales más representativos.

De esta manera

$$\left.\begin{array}{l} \text{(Desierto, Águila), (Desierto, Víbora de cascabel), (Desierto, Escorpión)} \\ \text{(Bosque, Oso pardo), (Pantano, Cocodrilo), (Selva, Tigre), (Selva, Tucán)} \\ \text{(Sabana, León), (Sabana, Cebra), (Selva, Jaguar), (Bosque, Ardilla)} \end{array}\right\} \in \mathcal{L}$$





Definición. Sea R una relación entre A y B. Definimos los siguientes conjuntos:

Dominio: Es el conjunto de elementos $a \in A$ tales que $(a,b) \in R$.

Conjunto de primeras coordenadas de las parejas (a,b) en la relación.

Codominio: Es el segundo conjunto del producto cartesiano.

Si $R \subseteq A \times B \rightarrow \text{codominio}(R) = B$

Imagen: Es el conjunto de elementos $b \in B$ tales que $(a,b) \in R$.

Conjunto de segundas coordenadas de los elementos de la relación.

Ejemplo. Sean $A = \{0, 1\}$ y $B = \{a, b, c\}$

$R = \{(0,a), (1,b), (0,c)\} \subseteq A \times B$

$\text{Dom}(R) = \{0, 1\}$

$\text{Codominio}(R) = B$

$\text{Imagen}(R) = \{a, b, c\} = B$

$L = \{(0,a), (0,b), (0,c)\} \subseteq A \times B$

$\text{Dom}(L) = \{0\}$

$\text{Codominio}(L) = B$

$\text{Imagen} = \{a, b, c\} = B$

$J = \{(0,b), (0,c)\} \subseteq A \times B$

$\text{Dom}(J) = \{0\}$

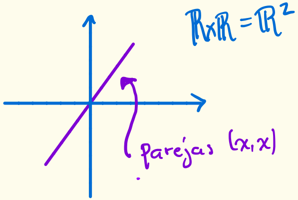
$\text{Codominio}(J) = B$

$\text{Imagen}(J) = \{b, c\}$

Tipos de relaciones

1) Para cualquier conjunto A, definimos la relación identidad en A como $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

$I_{\mathbb{R}} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow$



2) Sea $R \subseteq A \times B$ una relación, definimos la relación inversa de R como

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subseteq B \times A$

$R = \{(1,7), (\heartsuit, 8)\}$ $\quad R^{-1} = \{(7,1), (8,\heartsuit)\}$

3) Sea $R \subseteq A \times A$, diremos que R es reflexiva sii para toda $a \in A$, $(a,a) \in R$.

$A = \{1,2,3\}$ $\quad R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$

4) Sea $R \subseteq A \times A$, diremos que R es simétrica sii para toda $(x,y) \in R$ se cumple que $(y,x) \in R$

$A = \{1,2,3\}$ $\quad R = \{(1,2)\ (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$

5) Sea $R \subseteq A \times A$, diremos que R es transitiva sii $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$ implican $(x,z) \in R$.

En $\mathbb{R}$, $aRb \Leftrightarrow a < b$. $\quad x<y$ y $y<z \rightarrow x<y<z \rightarrow x<z \rightarrow xRz$.

6) Diremos que una relación $R \subseteq A \times A$ es de equivalencia sii R es reflexiva, simétrica y transitiva.

$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que aRb si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + 10n$.

Composición de relaciones

Definición. Sean A, B y C conjuntos, $R \subseteq A\times B$ y $L \subseteq B\times C$ relaciones.
La composición $L\circ R \subseteq A\times C$ relaciona A con C, y está dada por:

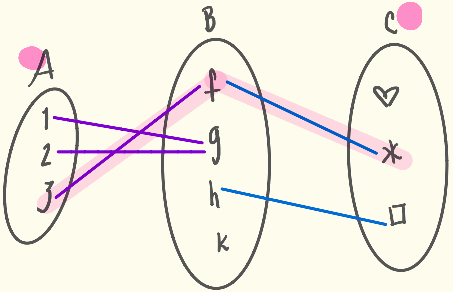
$$L\circ R = \{ (a,c) \mid \exists\, b\in B \text{ tal que } (a,b)\in R \text{ y } (b,c)\in L \}$$

Ejemplo

Considera los conjuntos $A=\{1,2,3\}$, $B=\{f,g,h,k\}$ y $C=\{\heartsuit, *, \square\}$ y las relaciones $R=\{\underline{(3,f)}, \underline{(2,g)}, \underline{(1,g)}\}$ y $L=\{\underline{(f,*)}, \underline{(h,\square)}\}$

Calcula $L\circ R$

$$L\circ R=\{(3,*)\}$$



Es el único camino completo que va de A hasta C.
Es decir, hay un b, que conecta al 3 con * (3,f) y (f,*).

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.