Conjunto Potencia

Definición. Sea A un conjunto. El conjunto potencia de A es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$. En símbolos

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}. \blacksquare$$

Ejemplo: Sea $A = \{a,b,c,d\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\} \}. \blacksquare$$

Recuerda que $A \in B$ y $A \subseteq B$ son diferentes. En el ejemplo anterior:

$$\{a\} \in \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \subseteq A$$
$$\{a\} \notin \mathcal{P}(A) \quad , \quad \{a\} \notin A.$$

Teorema 2.1.4. Si A es un conjunto con n elementos, ent. $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto con 2^n elementos.

Dem: Si $n=0$, entonces $A=\emptyset$ y tenemos $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ que es un conjunto con $1=2^0$ elementos. Así que el teorema es cierto si $n=0$.

Supongamos que A tiene $n \geq 1$ elementos. Podemos escribir A como $A=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Para describir un subconjunto B de A tenemos que saber si cada $x_i \in A$ es un elemento de B o no. Para x_i hay dos posibilidades ($x \in B$ or $x \notin B$), así que hay $2 \cdot 2 \cdots 2$ (n factores) diferentes de construir un subconjunto de A. Por lo tanto $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos. $\blacksquare$

Teorema 2.1.5. Sean A y B conjuntos. Entonces $A \subseteq B$ sii $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Dem:

i) Supongamos $A \subseteq B$. Queremos mostrar $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Sea $X \in \mathcal{P}(A)$. Ent. $X \subseteq A$. Como $X \subseteq A$ y $A \subseteq B$, por Teo. 2.1.1 concluimos $X \subseteq B$. Así que $X \in \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

ii) Suponga $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Queremos mostrar $A \subseteq B$. Por teorema 2.1.1. $A \subseteq A$, luego $A \in \mathcal{P}(A)$. Como $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ concluimos $A \in \mathcal{P}(B)$. Así que $A \subseteq B$. $\blacksquare$.