Conjuntos

Producto cartesiano

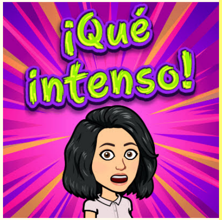
Producto cartesiano

Def. Sean A y B dos conjuntos. Definimos el producto cartesiano de A y B como:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}$$

El producto cartesiano de los conjuntos A y B es el conjunto que contiene a todas las parejas (a,b) que se forma al emparejar cada elemento $a \in A$ con cada $b \in B$.

O sea, todos contra todos.



Ejemplo:

1) Consideremos

$A = \{-1, 0, 1\}$

$B = \{$  $\}$

El conjunto que contiene a Wini.

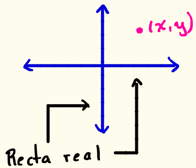
$A \times B = \{ (-1,$  $), (0,$  $), (1,$  $) \}$

2) $A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c) \}$$

3) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R} \text{ y } y\in\mathbb{R}\}$

El plano cartesiano



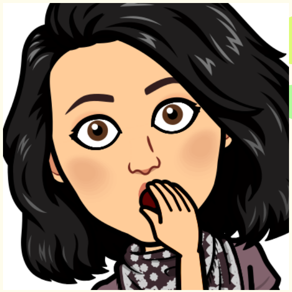
4) $A=\{♡,@\}$ $\qquad B=\{7,-9,-10\}$

$A\times B=\{(♡,7),(♡,-9),(♡,-10),(@,7),(@,-9),(@,-10)\}$

$B\times A=\{(7,♡),(7,@),(-9,♡),(-9,@),(-10,♡),(-10,@)\}$

Definición.

Diremos que las parejas (a,b) y (c,d) son iguales cuando $a=c$ y $b=d$.



Observación. En general, $A\times B\neq B\times A$.

Dem. Basta exhibir un par de conjuntos A y B tales que $A\times B\neq B\times A$.

Consideremos $A=\{7\}$ y $B=\{2\}$. En este caso $A\times B=\{(7,2)\}$ y $B\times A=\{(2,7)\}$. Como $2\neq 7$ entonces $(2,7)\neq(7,2)$, lo que implica que $(2,7)$ es un elemento de $B\times A$ que No pertenece a $A\times B$.

Por lo tanto $A\times B\neq B\times A$. ∎

Producto cartesiano

Teorema. Sean A y B conjuntos no vacíos. Entonces $A\times B = B\times A$ si y sólo si $A=B$

Recordemos que $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ y $B\subseteq A$.

Dem. ($\Rightarrow$) $A\times B = B\times A \rightarrow A=B$

Como $A\neq\emptyset$ y $B\neq\emptyset$ puedo considerar elementos $a\in A$ y $b\in B$.

Sea $a\in A$ y $b\in B$ $\rightarrow$ $(a,b)\in A\times B$ pero como $A\times B=B\times A$ $\rightarrow$ $(a,b)\in B\times A$.

$\rightarrow$ $a\in B$ y $b\in A$. Por lo tanto $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$ es decir $A=B$.

($\Leftarrow$) $A=B \rightarrow A\times B = B\times A$

Supongamos que $A=B$. Entonces $A\times B \overset{B=A}{=} A\times A \overset{A=B}{=} B\times A$.

Teorema. Para cualquier conjunto A $A\times\emptyset=\emptyset$ y $\emptyset\times A=\emptyset$.

Dem. (Por contradicción.)

Supongamos que $A\times\emptyset\neq\emptyset$, entonces $A\times\emptyset$ tiene al menos un elemento. Sea pues $(a,h)\in A\times\emptyset$.

Esto implica que $a\in A$ y $h\in\emptyset$. Lo cual es una contradicción pues no hay elementos en $\emptyset$.

Contradicción

De manera similar se demuestra que $\emptyset\times A=\emptyset$.

- Imágenes creadas con Bitmoji.

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.