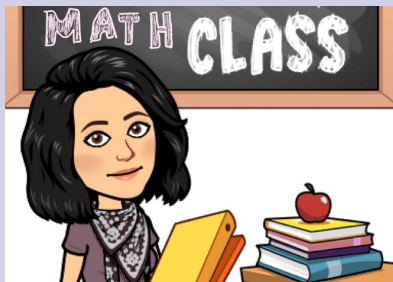


Conjuntos 1



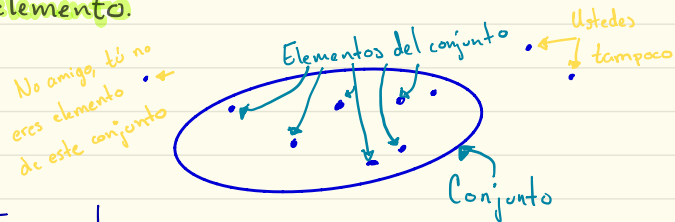
- Definición de conjunto
- Algunos conjuntos populares
- Notación de conjuntos



Conjuntos

Definición:

Un **conjunto** es una colección de objetos. A cada objeto del conjunto le llamaremos **elemento**.



Ejemplos

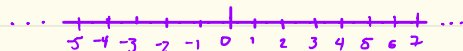
- 1) El conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$)
- 2) Los estudiantes de una clase
- 3) Los colores del arcoiris
- 4) Los números $1, 7, -20$ forman un conjunto

Definición:

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Algunos conjuntos populares

- $\emptyset$ Conjunto vacío: No tiene elementos
- $\mathbb{N}$ Conjunto de números naturales
 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- $\mathbb{Z}$ Conjunto de números enteros:
 $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{R}$ Conjunto de números reales
Todos los números en la recta numérica.



- $\mathbb{Q}$ Conjunto de números racionales:
Son los que se pueden expresar como cociente de dos enteros.
- $\mathbb{R}^2$ Conjunto de puntos en el plano cartesiano i.e.
 (x, y) tales que $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$

Notación

- Usamos letras mayúsculas para los conjuntos y minúsculas para sus elementos.

$$A = \{a, b, c\}$$

↑ Conjunto
↓ Elementos de A

- Enlistamos los elementos de un conjunto entre llaves $\{, \}$ y separados por una coma.
- $|, :$ (tal que)
- $\in$ (Pertenece a, en)
- $\notin$ (No pertenece a)
- Cuando uso llaves puedo enlistar los elementos o bien sólo "describirlos"

$\{ x \mid P(x) \}$
↑ que forma tienen
↑ tal que
↑ que condición cumplen

Ejemplos:

- Si $C = \{a, b, c, \text{pato}, z\}$ se cumple que
 - $a \in C$
 - $C \neq \emptyset$
 - $f \notin C$
- Usar la notación para el conjunto de números pares
 - $\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}\}$
 - $\{2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$
- Usar la notación para definir el conjunto de personas que han leído "orgullo y prejuicio"
 $\{x \mid x \text{ ha leído orgullo y prejuicio}\}$
- Usar la notación para definir el conjunto de números con raíces cuadradas enteras
 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Z}\}$

Subconjunto ($\subseteq$)

Definición.

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B es también un elemento de A .

B subconjunto de A se denota como $B \subseteq A$.

Nota:
Usamos la notación $A \not\subseteq B$ para decir que A no es subconjunto de B .

$B \subseteq A$ si y sólo si todo elemento de B está en A .

B es un conjunto que está "metido" en A .



$C \not\subseteq A$ $\neq$

$D \subseteq A$ ✓

$A \subseteq D$ ✓ si

Ejemplos.

- 1) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{1, 2, 5\}$
 $C = \{2\}$
 $D = \{1, 2, 3, 9\}$
 $E = \{6\}$

Decir si las contienci es son verdaderas o falsas.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| • $B \subseteq A$ | $C \subseteq D$ |
| • $B \subseteq D$ | • $E \subseteq A$ |
| • $C \subseteq A$ | • $A \subseteq 1$ |

→ 2) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
enteros racionales

Sea $n \in \mathbb{Z}$, y notemos que $n = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$

por lo tanto $n \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Propiedades.

Sean A, B y C conjuntos. Entonces

- a) $\emptyset \subseteq A$
- b) $A \subseteq A$
- c) $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican $A \subseteq C$

¿Demostración?

- a) Todo elemento en $\emptyset$ es elemento de A . $\Rightarrow$ Si, o sea no hay elementos en $\emptyset$. LOL.

La única manera en que esto no pasara sería que existiera un elemento x en $\emptyset$ que no esté en A . Pero esto es imposible pues no existen elementos x en $\emptyset$.

- b) Todo elemento de A es también un elemento de A . $\Rightarrow$ Si, definitivamente

Sea $x \in A \rightarrow x \in A \therefore A \subseteq A$.

c) Ahora si vamos a ponerlos serios "

Para ver que $A \subseteq C$ tengo que ver que cada elemento en A está también en C .
Sea $x \in A$, como $A \subseteq B$ entonces $x \in B$.
Por otro lado, como $B \subseteq C$ y $x \in B$ se sigue que $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$.

Ejercicios



I Utiliza la notación de conjuntos para describir los siguientes conjuntos.

- a) A = Conjunto de números reales mayores que 8 y menores que 37.5
- b) B = Soluciones enteras de la ecuación $14x + 3y = 18$
- c) C = Raíces del polinomio $x^8 - 1$
- d) Sean: D el conjunto de personas,
 A = conjunto de personas mayores de 18 y
 F = conjunto de personas que comen fresas
 - i) Adultos que comen fresas
 - ii) Personas que no comen fresas

II Compara los siguientes conjuntos y explica si son iguales o no

a) $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{n \mid n^2 \in \mathbb{Z}\}$

b) $A = \{1, -1\}$

$B = \{n \in \mathbb{R} \mid n^2 - 1 = 0\}$

$C = \{n - 10 \mid n = 11\}$

$D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0 \text{ y } n^2 < 4\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$

III Di cómo se relacionan los siguientes conjuntos, ¿iguales, subconjunto, diferentes?

a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$

b) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{0, 1\}$

c) $A = \{-12, -3, -1\}$ y $B = \{-3\}$

Respuestas : Ejercicios

I Utiliza la notación de conjuntos para describir los siguientes conjuntos.

a) A = Conjunto de números reales mayores que 8 y menores que 37.5

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8 \text{ y } x < 37.5\} \\ = (8, 37.5)$$

b) B = Soluciones enteras de la ecuación $14x + 3y = 18$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 14x + 3y = 18\}$$

c) C = Raíces del polinomio $x^8 - 1$

$$C = \{x \mid x^8 - 1 = 0\}$$

d) Sean: D el conjunto de personas,
Adultos $\hookrightarrow$ A = conjunto de personas mayores de 18 y
F = conjunto de personas que comen fresas

i) Adultos que comen fresas

$$\{x \in D \mid x \in A \text{ y } x \in F\} = \{x \in A \mid x \in F\} = \{x \in F \mid x \in A\}$$

ii) Personas que no comen fresas

$$\{x \in D \mid x \notin F\}$$

II Compara los siguientes conjuntos y explica si son iguales o no

a) $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1^2, 2^2, \dots\} = \{1, 4, 9, \dots\}$

$$B = \{n \mid n^2 \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \dots\}$$

notemos que $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{N} \rightarrow \sqrt{2} \in B$, pero $\sqrt{2} \notin A$. Por lo tanto $A \neq B$

b) $A = \{1, -1\}$

$$B = \{n \in \mathbb{R} \mid n^2 - 1 = 0\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n^2 = 1\} = \{1, -1\}$$

$$C = \{n - 10 \mid n = 11\} = \{11 - 10\} = \{1\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0 \text{ y } n^2 < 4\} = \{1, -1\}$$

$$A = B = D \neq C$$

III Di como se relacionan los siguientes conjuntos, ¿iguales, subconjunto, diferentes?

a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$

- Todo número natural es entero $\rightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- Todo número entero, n , se puede ver como cociente de enteros, $\frac{n}{1} \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- Todo número racional está en la recta numérica $\rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

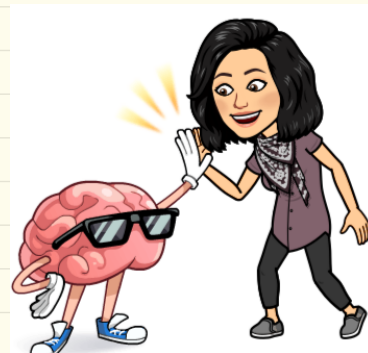
b) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{0, 1\}$

- $2 \in A$ pero $2 \notin B \rightarrow A \not\subseteq B$
- $0 \in B$ pero $0 \notin A \rightarrow B \not\subseteq A$

$$A \neq B$$

c) $A = \{-12, -3, -1\}$ y $B = \{-3\}$

-3 es el único elemento en B y $-3 \in A$
entonces $B \subseteq A$



Referencias:

- Imágenes creadas con Bitmoji
- Documento creado por Arilín de Arilín's Math World

