Álgebra Lineal I
Unidad 1: Tarea en equipo

1. Sea n un entero positivo y $A = [a_{ij}]$ la matriz en $M_n(\mathbb{R})$ dada por $a_{ij} = 2$ si $i \geq j$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Por ejemplo, a continuación está la matriz cuando $n = 3$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Para cada n, muestra que A es una matriz invertible. Encuentra de manera explícita su inversa.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Encuentra, con demostración, todas las matrices $B \in M_2(\mathbb{C})$ que conmutan con A.

   b) Encuentra, con demostración, todas las matrices $B \in M_2(\mathbb{C})$ para las cuales $AB + BA$ es la matriz cero.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son distintas dos a dos, es decir, todas distintas entre sí. Sea $B \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que $AB = BA$. Demuestra que B es una matriz diagonal.

4. Sean a y b números reales. Encuentra todas las soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones en las variables w, x, y, z:
$$\begin{cases} w + x & = a \\ x + y & = b \\ y + z & = a \\ z + w & = b. \end{cases}$$

5. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea
$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

a) Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$A(a)A(b) = A(a + b - 2ab).$$

b) Dado $x \in \mathbb{R}$, calcula $A(x)^n$.

Sugerencia.

1) Usando el inciso (a) de este problema calcula explícitamente las potencias $A(x)^n$ para los primeros n. Por ejemplo, calcula $A(x), A(x)^2, \ldots, A(x)^5$.
2) Después de hacer algunos casos particulares podrás notar que $A(x)^n = A(p(x))$ donde $p(x)$ es un polinomio de grado n. Acomoda los coeficientes de lo que obtuviste en una tabla de la siguiente forma

n	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
1						
2						
3						
4						
5						

3) Analiza lo que obtuviste en la tabla anterior para ver de qué forma es el coeficiente de x^k en $p(x)$ Para esta parte conviene pensar en coeficientes binomiales.
4) Expresa $A(x)^n$ como una suma de potencias de x de manera general, es decir, de la forma $A(x)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.
5) Demuestra por inducción la fórmula que encontraste para $A(x)^n$. Para este paso, usa propiedades de los coeficientes binomiales.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721