Álgebra Lineal I
Proyecto
Modelo de Leslie para explotación animal y eigenvalores

1. Motivación

Recordemos que el objetivo de construir un modelo matemático es determinar un conjunto de ecuaciones que representen, lo mejor posible, una situación real.

Un tipo de problema muy común en la biología matemática es estudiar la variación poblacional de una especie. Este modelo se realiza en función del tiempo, obteniendo un proceso continuo o discreto que recibe el nombre de **dinámica de la población**, cuya intención es determinar causas de los cambios numéricos, predecir el comportamiento de la especie y analizar las consecuencias ecológicas.

Los modelos que estudian el crecimiento de poblaciones independientemente de la densidad de dichas poblaciones, corresponden a los casos más simples. Existen dos procesos que afectan al cambio del tamaño de la población: 1) los nacimientos y la inmigración, que aumenta el tamaño; y 2) las defunciones y la emigración, que la disminuye. En los modelos más simplistas podemos suponer que estos procesos no intervienen.

Un importante modelo de dinámica de poblaciones es el denominado **"modelo de Leslie"**, en honor al fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900-1974). Este modelo tiene las hipótesis más simples que podemos plantear: los recursos disponibles son ilimitados y todos los individuos son iguales (en referencia a la natalidad, la mortalidad, la fertilidad y la supervivencia). Por lo tanto, el modelo de Leslie describe el crecimiento de una población clasificándola por edades en intervalos de igual número de años.

Suponemos que la edad máxima alcanzada es de L años y a la población la dividimos en n clases de edades. Cada clase tendrá L/n años de duración.

2. Definiciones

Definición. Definimos al **tiempo de observación** t como el tiempo en que un individuo cambia desde el momento inicial hasta la actual clase de edad, es decir,

$$t = \left\lfloor \frac{\text{tiempo real}}{n} \right\rfloor.$$

Definición. Denotamos como $x_i(t_k)$ al número de individuos en el intervalo i-ésimo de edades al tiempo de observación t_k. Definimos **la distribución inicial** como el vector

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)).$$

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

Definición. Un **esquema** es una representación con recursos gráficos (recuadros, flechas, líneas) que ayuda a organizar la información de un modelo.

Definición. Entendemos por **explotación** a la extracción de individuos de alguna especie. Definimos a H como la **matriz de explotación** como la matriz que representa la fracción de individuos que se separa de cada grupo.

Definición. Si λ es un eigenvalor de la matriz A y su valor absoluto es mayor que el valor absoluto (o módulo en el caso complejo) de cualquier otro eigenvalor, es decir,

$$|\lambda| \geq |\lambda_i|,$$

para todo eigenvalor λ_i, entonces decimos que λ es un **eigenvalor dominante** de la matriz A.

3. Exploración de las definiciones

La población que estudiaremos cumple que la edad máxima es de 20 años. Se considerarán periodos vitales de 5 años, dividiendo a nuestra población en 4 clases de edades.

De observaciones experimentales, se deduce que sólo una cuarta parte de los individuos del primer grupo (1-5 años) sobrevive hasta el siguiente periodo de tiempo; que sólo la mitad de los del segundo grupo (6-10 años) sobreviven hasta los (11-15 años) y sólo una décima parte de los de éste alcanzan el último grupo (16-20 años). Asimismo se observa que, en promedio, cada individuo del segundo grupo procrea un nuevo individuo, mientras que los de los grupos 3 y 4 procrean 3 y 2 nuevos individuos, respectivamente.

1. Dibuja un esquema que exprese las relaciones anteriores.

2. La población inicial está distribuida como $x_1(0) = 100$, $x_2(0) = 70$, $x_3(0) = 70$ y $x_4(0) = 40$. Calcula la distribución por edades pasados 10, 15, 20 y 35 años, es decir, para $t = 2, 3, 4, 7$.

4. Problemas

1. Escribe las relaciones entre el número de individuos en el periodo de tiempo k y en el periodo de tiempo $k-1$, es decir, escribe $x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)$ con en términos de $x_1(k-1), x_2(k-1), x_3(k-1)$ y $x_4(k-1)$. Observa que son relaciones lineales.

2. Expresa las relaciones del inciso anterior de manera matricial, es decir, encuentra una matriz A en $M_4(\mathbb{R})$ para la cual
$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}.$$

3. Describe una fórmula general para calcular la distribución de la población $x(k)$ al tiempo k que sólo dependa de la distribución inicial $x(0)$ y de potencias de la matriz A obtenida en el inciso anterior. Demuestra dicha fórmula por inducción.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

Ahora imagina que se quiere explotar a la especie de la que estamos hablando. Para ello, consideramos la matriz de explotación

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{pmatrix}.$$

en la cual h_i nos dice el porcentaje (como un número en $[0,1]$) de individuos en la etapa de vida i que se usarán en cada periodo. Por definición tenemos que $0 \leq h_i \leq 1$ con $i = 1,2,3,4$. Para que la explotación sea **responsable**, la distribución de las edades al final del periodo menos el rendimiento será igual a la distribución de edades al comienzo del periodo, es decir, si A es la matriz de la representación de crecimiento del inciso 2, se requiere que

$$Ax - HAx = x.$$

4. Encuentra la distribución poblacional inicial x, para la cual la **explotación uniforme** (en la cual $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$) es responsable. Aquí h es un número en $[0,1]$.

5. Si el vector de la distribución inicial es $x = (100, 70, 70, 40)$, ¿la explotación uniforme es una explotación responsable? Si tu respuesta es sí, calcula el valor de h que funciona para que lo sea.

6. ¿Existe una distribución poblacional x tal que que una explotación de sólo la primera clase de edad ($h_1 = h, h_2 = h_3 = h_4 = 0$) sea responsable? ¿Cuál? Encuentra todas las posibilidades.

7. Reescribiendo la hipótesis de explotación responsable, esto sucede si y sólo si $(A - HA - I)x = 0$. Existe un vector x distinto de cero que funciona si y sólo si la matriz $A - HA - I$ no es invertible. Discute para qué matrices H es posible hacer esto.

La ecuación $x(k) = A^k x(0)$ escrita de esta manera, no nos aporta de entrada un cuadro general de la dinámica del crecimiento. Para ello, debemos recurrir al estudio de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz. El siguiente teorema nos servirá para obtener información del crecimiento o decrecimiento de nuestra población a largo plazo. No es necesario que demuestres este teorema, pero lo usarás un poco más abajo.

Teorema. *Supongamos que la matriz A tiene un eigenvalor dominante positivo λ y que v es un eigenvector asociado, entonces en el modelo se cumple lo siguiente:*

- *Para valores grandes de k, $x(k)$ tiende a un múltiplo de v.*
- *Para valores grandes de k, la proporción entre la población total en la etapa k y la población total en la etapa $k-1$ tiene a λ.*
- *Además, si $\lambda > 1$, la población crece hacia el infinito; si $\lambda < 1$, la población se extinguirá, y si $\lambda = 1$, la población se estabilizará.*

8. Si la población de nuestra especie está determinada por los datos de la sección de exploración de las definiciones, ¿qué podemos decir de ella a largo plazo?

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721