Álgebra Lineal I
Proyecto
Hoyos de gráficas, espacios cociente y homología

1. Motivación

La topología es un área de las matemáticas que lidia con *espacios topológicos* y *funciones continuas*. Un espacio topológico no es más que un conjunto donde podemos tener una idea de "cercanía". Conoces muchos espacios topológicos:

- $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico,
- $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n también es un espacio topológico,
- $\mathbb{C}$ también es un espacio topológico.

Si bien existen espacios topológicos "más abstractos" estos no nos interesarán por ahora.

Intuitivamente, la topología estudia la forma. Muchas veces hay preguntas importantes, como ¿cuándo se puede deformar un espacio en otro? Esta pregunta es sorprendentemente difícil, y a raíz de esto surgió la *topología algebraica* con el artículo *Analysis Situs* de Poincaré entre 1899 y 1904. La idea es asociar a diferentes espacios "invariantes algebraicos": grupos, anillos, o en nuestro caso, espacios vectoriales, tal que si un espacio X se deforma en un espacio Y, el grupo o espacio vectorial asociado es el mismo.

La topología algebraica ha tenido un amplio espectro de aplicaciones. Desde encontrar "curvas geodesicas" en relatividad general (en física), hasta analizar grandes cantidades de información en "análisis topológico de datos" (en ciencias de la computación), entre muchas otras. Algunos resultados importantes de esta área son:

- El teorema del punto fijo de Brouwer: cualquier función continua $f : D^2 \to D^2$ tiene al menos un punto fijo (aquí D^2 es el disco en el plano).
- El teorema "de la bola peluda": No se puede peinar un coco sin dejar al menos un remolino.
- El teorema de las tres geodésicas: Cualquier espacio "parecido" a una esfera tiene tres curvas geodésicas simples sin autointersecciones. Esto fue motivado por las cartas navales.

Originalmente a la topología algebraica se le conocía como "topología combinatoria", pues consistía en darle cierta estructura a los espacios estudiados y "contar" algunas relaciones entre los elementos. Un ejemplo es el de "triangular un espacio" como se ve en el delfín de la siguiente imagen. Ya con los triángulos dibujados, se puede estudiar cómo se relacionan las caras, las aristas y los vértices de nuestro espacio.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

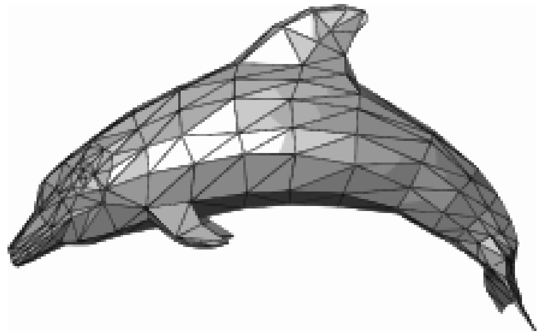

Figura 1: Un delfín triangulado.

En este proyecto estudiaremos una versión un poco más simple de lo anterior. Vamos a fijarnos en espacios relativamente sencillos, llamados *gráficas*, y vamos a asociarles dos espacios vectoriales, llamados "espacios" o "grupos" de *homología*. Como nota, generalmente usamos el término *grupo de homología* por costumbre histórica.

Intuitivamente, nuestros grupos de homología van a capturar información sobre los "hoyos" que pueda tener nuestra gráfica, ya sean hoyos de dimensión 1 o de dimensión 0 (lo cual veremos más adelante qué quiere decir).

2. Espacios vectoriales cociente

Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. La idea detrás de un *espacio cociente* es "apachurrar" un subespacio a un punto, para "ignorarlo" o "declararlo cero" de una manera natural. Estos van a ser de suma importancia en nuestro estudio, pues son necesarios para siquiera definir la homología. Intuitivamente vamos a tener subespacios que "no nos importan", y querremos ignorarlos o declararlos cero para estudiar la estructura restante.

Teniendo esto presente, la definición puede ser un poco intimidante, pero veremos ejemplos concretos. Declaramos la relación en V dada por $v \sim v'$ si y sólo si $v - v' \in W$.

Observación 1. *La relación $\sim$ es de equivalencia:*

- *Para cualquier $v \in V$ tenemos que $v - v = 0$ y $0 \in W$ para cualquier subespacio.*
- *Si $v \sim v'$ entonces $v - v' \in W$. Luego, como W es un subespacio, es cerrado bajo producto por escalares. Al multiplicar por -1 tenemos que $-(v - v') = v' - v \in W$. Esta última expresión nos dice que $v' \sim v$.*
- *Si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$ entonces $v - v' \in W$ y $v' - v'' \in W$. Así, como W es subespacio, tenemos que $(v - v') + (v' - v'') \in W$, pero $(v - v') + (v' - v'') = v - v'' \in W$. Luego $v \sim v''$.*

Recuerda que dado un conjunto A y $\sim$ una relación de equivalencia en A, podemos crear el conjunto $A/\sim$ conformado por clases de equivalencia $[a]$ con $a \in A$.

Construímos el *espacio cociente* V/W primero como conjunto, y luego como espacio vectorial. El conjunto subyacente va a ser $V/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que dimos ($v \sim v'$ si $v - v' \in W$). Entonces un elemento genérico de V/W se ve como $[v]$, la clase de equivalencia de algún

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

v. Esta clase de equivalencia usualmente la denotamos (con abuso de notación) por $v+W$, ya que dos clases de equivalencia $[v]$ y $[v']$ son iguales si $v-v'\in W$, por lo que "despejando" $v=v'+W$.

Ejemplo 1. En $V=\mathbb{R}^3$ si tomamos al subespacio W como el eje x, entonces la relación está dada por $u\sim v$ si $v-u$ está en el eje x. Entonces por ejemplo $(\pi,2,4)\sim(3\sqrt{2},2,4)$ pues

$$(\pi,2,4)-(3\sqrt{2},2,4)=(\pi-3\sqrt{2},0,0),$$

y este último vector está en el eje x, que es W.

Sin embargo, $(2,0,-1)$ no está relacionado con $(3,4,0)$ pues

$$(2,0,-1)-(3,4,0)=(-1,-4,-1),$$

y este último vector no está en W.

Podemos preguntarnos por ejemplo ¿quienes son todos los elementos en la clase de $(2,1,0)$? Esta clase consiste de todos los (x,y,z) relacionados con $(2,1,0)$, es decir todos los (x,y,z) que cumplen que

$$(x,y,z)-(2,1,0)=(x-2,y-1,z)$$

está en W. Para que la diferencia esté en W, o sea, el eje x, sus coordenadas 2 y 3 tienen que ser cero, es decir $y-1=0$ y $z=0$. O sea

$$[(2,1,0)]=(2,1,0)+W=\{(x,y,z)\in V: y=1, z=0\}=\{(x,1,0): x\in\mathbb{R}\}.$$

Ejercicio 1. *En el ejemplo anterior, describe geométricamente la clase de equivalencia del punto* $(1,-1,1)$. *Exprésala como intersección de hiperplanos afines de* $\mathbb{R}^3$. *Un* hiperplano afín *de* $\mathbb{R}^3$ *es la traslación de un hiperplano como los que conocemos, es decir, es un conjunto de la forma*

$$v+S=\{v+s: s\in S\},$$

en donde S *es un subespacio de dimensión* 2 *de* $\mathbb{R}^3$

Para poder hacer este ejercicio, necesitarás trasladar a la clase de equivalencia de $(1,-1,1)$ *para que pase por el origen y encontrar a los hiperplanos en cuestión. Luego, traslada estos hiperplanos de vuelta para encontrar la familia de hiperplanos afines cuya intersección es la clase de equivalencia.*

Ahora vamos a darle a V/W una estructura de espacio vectorial. Dadas dos clases de equivalencia $v+W$ y $v'+W$ (si prefieres, puedes pensarlas como $[v]$ y $[v']$) definimos la suma como

$$(v+W)+(v'+W)=[v]+[v']:=[v+v']=(v+v')+W.$$

Por otro lado, dado un escalar $\lambda\in F$, definimos el producto por escalar como

$$\lambda\cdot(v+W)=\lambda\cdot[v]:=[\lambda\cdot v]=\lambda v+W.$$

Ejercicio 2. *Demuestra que las operaciones están bien definidas. Es decir, que da igual cual representante de* $[v]$ *y* $[v']$ *escojas, el resultado es el mismo. En términos más prácticos, verifica que si* $v\sim v'$ *y* $w\sim w'$ *entonces* $v+w\sim v'+w'$ *y* $\lambda v\sim\lambda v'$.

Si gustas, puedes demostrar de manera opcional que el conjunto, junto con las operaciones que dimos, satisface todos los axiomas de espacio vectorial. Esto es optativo, pero te puede ayudar mucho a repasar conceptos del curso y entender más a profundidad el espacio cociente.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

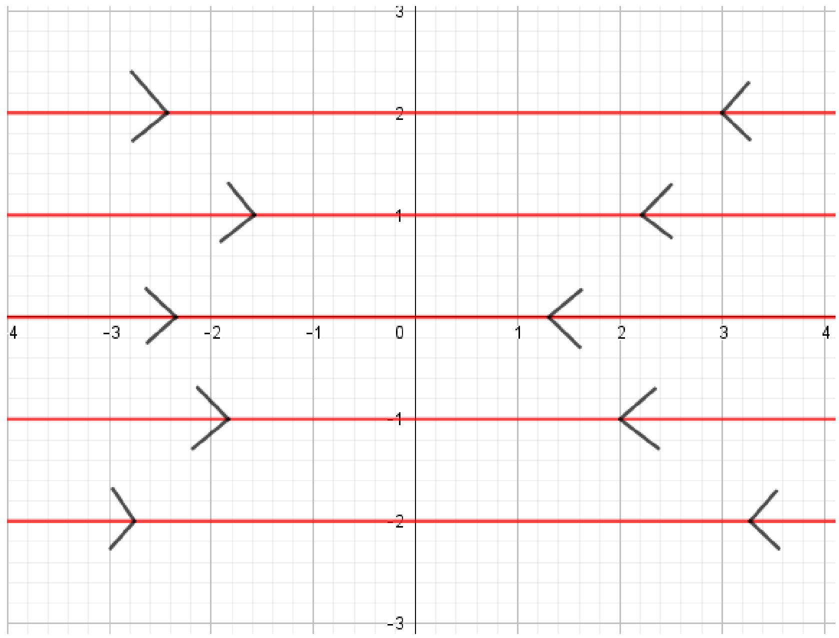

Figura 2: Espacio cociente. Las rectas del plano se apachurran al eje y

Observación 2. *Con estas operaciones, el representante del cero* $[0] = 0 + W = W$ *sirve como nuestro nuevo cero. Estamos logrando "hacer cero" nuestro* W.

Veamos ahora un ejemplo que incluye las operaciones de suma y producto escalar. Esto nos ayudará a aterrizar las ideas.

Ejemplo 2. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ el subespacio del eje x. ¿Quién es V/W? ¿Cómo se ve en el plano?

Sea (x, y) un vector arbitrario en V. Tenemos que $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $(x, y) - (x', y')$ está en W, es decir si $(x - x', y - y')$ está en W, o equivalentemente si $y = y'$. Entonces toda la recta horizontal (r, y) para cualquier $r \in \mathbb{R}$ va a dar a la misma clase de equivalencia. Intuitivamente, estamos "apachurrando" las rectas paralelas al eje x, esto lo podemos ver en la figura. Otra forma de pensarlo es que estamos haciendo un espacio vectorial donde los objetos son las rectas horizontales del plano, y estamos diciendo cómo podemos sumarlas y multiplicarlas por escalar. Por ejemplo, la suma de la recta $y = 3$ con la recta $y = 6$ es simplemente la recta $y = 9$. El producto escalar de la recta $y = 8$ con el escalar $\frac{1}{2}$ es la recta $y = 4$.

Viendo de nuevo lo que obtenemos en la figura, debería ser un poco más claro que si apachurramos en el sentido de las flechas lo que nos queda es sólo el eje y, que es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Veamos que se cumple esto, es decir, que $V/W \sim \mathbb{R}$. Nuestro isomorfismo va a ser naturalmente "proyectar" sobre el eje y, o sea $\pi : V \to \mathbb{R}$ dado por $\pi(x, y) = y$. Ojo, esta transformación definida en $\mathbb{R}^2$ no es un isomorfismo, pero podemos primero "pasar al cociente", es decir construir

$$\pi : V/W \to \mathbb{R}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

dada por

$$\pi : [(x,y)] \mapsto \pi(x,y) = y.$$

Primero π está bien definida: si $(x,y) \sim (x',y')$ entonces $y - y' = 0$ por lo que vimos anteriormente. Es decir $y = y'$ y por tanto $\pi(x,y) = \pi(x',y')$. Es claro que π es lineal. π es inyectiva, pues si $\pi([(x,y)]) = 0$ quiere decir que $y = 0$, por lo que (x,y) está en el eje x (en W) y así $(x,y) \sim (0,0)$. Por otro lado, es suprayectiva, para cualquier $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $\pi([(0,r)]) = r$.

Así π es un isomorfismo y por tanto $V/W \sim \mathbb{R}$.

En el ejemplo anterior hicimos la composición de la proyección al eje y, con la transformación "paso al cociente". Esta es la transformación $\eta : V \to V/W$ definida por

$$\eta : v \mapsto [v] = v + W.$$

Ejercicio 3. *Muestra que η es una transformación lineal.*

Estudiemos quién es el kernel de η. Tenemos que $v \in \ker \eta$ si y sólo si $\eta(v) = 0$, o sea que $\eta(v) = [v] = [0]$, pero $v \sim 0$ si y sólo si $v - 0 = v$ está en W. Esto prueba que $\ker \eta = W$. Por otro lado, observa que η es suprayectiva por cómo construimos V/W: todo elemento de este espacio es la clase de equivalencia de algún elemento en V. Así

$$\ker \eta = W$$
$$\operatorname{Im} \eta = V/W.$$

Por el teorema de rango-nulidad

$$\dim \ker \eta + \dim \operatorname{Im} \eta = \dim V$$

sustituyendo

$$\dim W + \dim V/W = \dim V$$

y así

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Nota cómo esta expresión sí coincide con nuestra interpretación: a V le estamos "quitando" W.

Ejercicio 4.

- *Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio de matrices de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea W el subespacio de las matrices simétricas. ¿Quién es V/W? (Da un isomorfismo con algún espacio familiar).*
- *Como generalización del ejercicio anterior, demuestra que si $V = W \oplus Z$, entonces V/W es isomorfo a Z (le estamos "quitando" a W). Para hacer esto, recuerda que si $V = W \oplus Z$, entonces existe la proyección π de V a Z. Puedes componer a esta proyección con la transformación "paso al cociente" para construir el candidato a isomorfismo.*

3. Espacios vectoriales libres

Otra construcción muy importante y recurrente en muchas áreas de las matemáticas es el espacio vectorial *libre* generado por un conjunto. La idea es construir un espacio vectorial muy sencillo a partir de un conjunto cualquiera. Comencemos con un ejemplo.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

Ejemplo 3. Imaginemos que $A = \{a, b\}$. Aquí a y b no son más que las letras a y b. Supongamos que nuestro campo de elección es $\mathbb{R}$. Queremos construir un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ usando estas dos letras. ¿Cómo podemos hacerlo?

Una opción sería considerar las *combinaciones lineales formales* de a y b. Es decir, el conjunto de todos los elementos de la forma

$$r_1 a + r_2 b,$$

en donde r_1 y r_2 son números reales.

Para darle estructura de espacio vectorial podemos hacerlo "a lo bruto". Es decir, ¿cuánto vale $(2a+4b)+(\pi a+67b)$? Pues $(2+\pi)a+71b$. ¿Cuanto vale $2\cdot(a+50b)$? Pues $2a+100b$. Nota como a y b en realidad no intervienen en la aritmética, pues sólo son letras. Podríamos haber usado en lugar de a y b solo 'manzana' y 'pera' y obtendríamos un espacio isomorfo, sólo que serían combinaciones del estilo $r_1 \cdot \text{manzana} + r_2 \cdot \text{pera}$, donde sumamos manzanas con manzanas y peras con peras.

La definición formal de espacio libre no es muy diferente a lo que discutimos en el ejemplo anterior: si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito y F un campo definimos el *espacio libre generado por A* como el espacio de las combinaciones lineales finitas

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

con $c_i \in F$ y con las operaciones correspondientes a sumar y hacer producto escalar "a lo bruto". Lo denotamos por $F^{(A)}$.

Ejercicio 5.

- *Sea $\Omega = \{@, ☺, ♡, \bigstar, ©\}$. Encuentra un isomorfismo φ que muestre que $\mathbb{R}^{(\Omega)}$ y $\mathbb{R}^5$ son isomorfos.*

- *Si A es un conjunto finito con $|A| = n$, demuestra que $F^{(A)}$ tiene dimensión n y da un isomorfismo explícito $\varphi : F^{(A)} \to F^n$.*

4. ¿Que es una gráfica?

Para entender la idea detrás de la homología, vamos a comenzar con espacios muy sencillos: las gráficas en el plano. Una gráfica no es más que un conjunto finito de vértices y un conjunto finito de aristas entre estos vértices. Como ejemplo, mira la Figura 3.

También vamos a considerar gráficas que tengan aristas que hacen "bucles" como la de la Figura 4. Así mismo, permitiremos que existan varias aristas entre dos vértices.

Las gráficas son espacios muy sencillos. Para propósitos de la homología, hace falta *escoger una orientación* de nuestras aristas. Esto no es nada más y nada menos que escoger una dirección para nuestras aristas, la que queramos, y obtener una *gráfica dirigida* que simplemente es una gráfica donde cada arista tiene un sentido distinguido. Por ejemplo podemos retomar nuestra primera gráfica y convertirla en una gráfica dirigida como la de la Figura 5.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

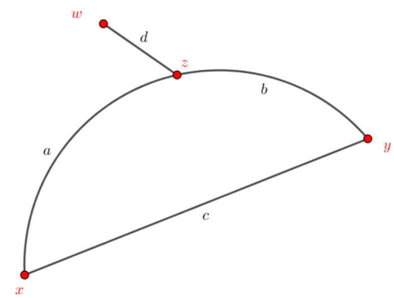

Figura 3: Una gráfica en el plano con conjunto de vértices $V = \{x, y, z, w\}$ marcados en rojo y aristas $A = \{a, b, c, d\}$ marcadas en negro.

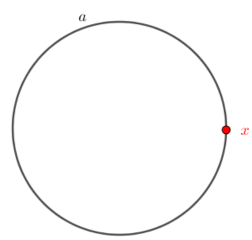

Figura 4: Una gráfica con un vértice y una arista en un bucle.

5. Primer ejemplo de homología de gráficas

Antes de definir propiamente la homología de una gráfica, vamos a dar un ejemplo de cómo la calcularíamos. Recuerda que queremos que la homología capture la información de los "hoyos" que tiene nuestro espacio. Nuestro ejemplo será la gráfica dirigida G de la Figura 6.

¿Nuestra gráfica G tiene hoyos? Pues vemos que sí, tenemos el hoyo formado por b, c, e, el hoyo formado por d, a, e y tenemos el "hoyo" más grande a, b, c, d, pero que de cierta manera es una "suma" de los otros dos más chicos.

Comenzamos definiendo dos espacios vectoriales, llamados los espacios de "cadenas":

- El *espacio* C_1 es el espacio vectorial libre sobre $\mathbb{R}$ y generado por por el conjunto de aristas A. En nuestro ejemplo es el espacio libre generado por $\{a, b, c, d, e\}$. Un elemento típico se ve como
$$a_1 \cdot a + a_2 \cdot b + a_3 \cdot c + a_4 \cdot d + a_5 \cdot e$$
con $a_i \in \mathbb{R}$ escalares.

- El *espacio* C_0 es el espacio vectorial libre sobre $\mathbb{R}$ y generado por el conjunto de vértices V. En nuestro ejemplo C_0 es el espacio libre generado por $\{x, y, z, w\}$.

Como ejemplos más concretos, un elemento de C_1 de nuestra gráfica podría ser, por ejemplo $2a + \pi b + \sqrt{2}c - e$ (aquí el coeficiente de d es cero). Un elemento de C_0 de nuestra gráfica podría ser, por ejemplo, $4x - 5y$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

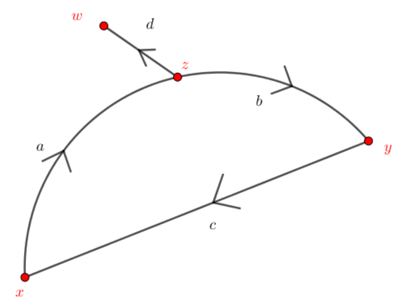

Figura 5: Una gráfica dirigida G. Observa como cada arista "va de un vértice a otro" en el sentido de la flecha.

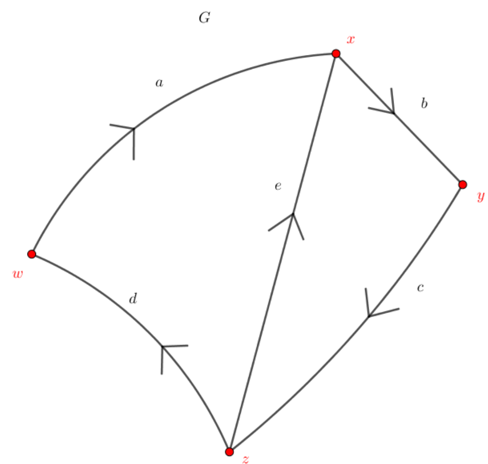

Figura 6: La gráfica G

Vamos a definir una transformación lineal, comúnmente conocida como "operador de frontera" y denotado

$$\partial : C_1 \to C_0.$$

¿Qué frontera podemos sacar?

El operador ∂ tiene como dominio el espacio libre generado por las aristas, entonces tiene sentido pensar en términos de la "frontera de una arista". Dado que nuestras aristas están dirigidas, podemos incluso darle más sentido a esta expresión y considerar

$$\partial(\text{arista}) = \text{punto final } - \text{punto inicial}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

En nuestra gráfica por ejemplo

$$\begin{cases}\partial a = x - w\\ \partial b = y - x\\ \partial c = z - y\\ \partial d = w - z\\ \partial e = x - z\end{cases}.$$

Como a, b, c, d, e son una base para C_1, hay una única forma de *extender* ∂ a una transformación lineal $\partial : C_1 \to C_0$, definiendo

$$\partial(a_1 a + a_2 b + a_3 c + a_4 d + a_5 e) := a_1\partial(a) + a_2\partial(b) + a_3\partial(c) + a_4\partial(d) + a_5\partial(e)$$

Estamos listos para definir los grupos de homología de la gráfica G. Definimos el *primer grupo de homología de* G como

$$H_1(G) = \ker \partial \subseteq C_1.$$

También definimos el 0-ésimo grupo de homología de G como

$$H_0(G) = C_0 / \operatorname{Im} \partial.$$

Aquí estamos usando la definición de espacio cociente que presentamos en secciones anteriores. Investiguemos un poco cómo se ve $H_1(G)$.

Un elemento $\xi = r_1 a + r_2 b + r_3 c + r_4 d$ está en $\ker \partial$ si y sólo si

$$\begin{aligned}\partial(r_1 a + r_2 b + r_3 c + r_4 d + r_5 e) &= r_1\partial a + r_2\partial b + r_3\partial c + r_4\partial d + r_5\partial e\\ &= r_1(x - w) + r_2(y - x) + r_3(z - y) + r_4(w - z) + r_5(x - z)\\ &= (r_1 - r_2 + r_5)x + (r_2 - r_3)y + (r_3 - r_4 - r_5)z + (-r_1 + r_4)w\\ &= 0.\end{aligned}$$

Cómo lidiamos con un espacio vectorial libre, la expresión es nula si y sólo si cada uno de los coeficientes es cero. Entonces tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} r_1 - r_2 + r_5 &= 0\\ r_2 - r_3 &= 0\\ r_3 - r_4 - r_5 &= 0\\ -r_1 + r_4 &= 0\end{cases}$$

Usando nuestro conocimiento de álgebra lineal, tenemos que resolver el sistema homogéneo con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Escalonando y reduciendo A obtenemos

$$A_{red} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

De aquí obtenemos que r_4 y r_5 son variables libres y el resto son variables pivote. Entonces $\xi \in C_1$ está en $\ker \partial$ si y sólo si

$$\begin{cases} r_1 = r_4 \\ r_2 = r_4 + r_5 \\ r_3 = r_4 + r_5 \end{cases}.$$

O sea si $\xi \in C_1$ es de la forma

$$\xi = r_4 a + (r_4 + r_5)b + (r_4 + r_5)c + r_4 d + r_5 e = r_4(a + b + c + d) + r_5(b + c + e).$$

Llamando a las variables libres r_4 y r_5 como r y s respectivamente, tenemos que

$$\ker \partial = \{s(a + b + c + d) + t(b + c + e) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Recuerda, a, b, c, d y e están fijos, entonces la expresión de arriba sólo es de la forma $s \cdot X + t \cdot Y$ para X, Y fijos. Es decir, $\ker \partial$ es "como un plano", y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}^2$, pues podemos construir el isomorfismo $\varphi : \ker \partial \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi : s(a + b + c + d) + t(b + c + e) \mapsto (s, t).$$

Este tiene un inverso muy claro, dado por $\psi : (s, t) \mapsto s(a + b + c + d) + t(b + c + e)$. Queda entonces probado el siguiente resultado para nuestra gráfica particular G.

Proposición 1.

$$H_1(G) \cong \mathbb{R}^2$$

Este espacio tiene dimensión 2, y esto coincide con nuestra intuición de que G tiene "dos hoyos" linealmente independientes, y de que el tercer hoyo no es más que una "combinación lineal de los otros dos".

Ya tenemos uno de los dos grupos de homología. Ahora queremos calcular a H_0, es decir, encontrar a $\operatorname{Im} \partial$. Ya que tenemos A_{red} podemos fijarnos en el espacio columna de A y concluir que una base nos la dan los vectores $(1, 0, 0, -1), (-1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, -1, 1)$. Estos corresponden a los elementos $x - w, y - x$ y $w - y$ respectivamente. Para encontrar H_0 hay que considerar al cociente $C_0 / \operatorname{Im} \partial$, para esto extendemos la base de $\operatorname{Im} \partial$ a una base de C_0 con el vector $(1, 0, 1, 0)$, que corresponde a la expresión $x + z$. Por el último ejercicio de la sección de espacios cociente, podemos concluir (usando el mismo razonamiento que antes) que

$$C_0 / \operatorname{Im} \partial \cong \{r \cdot (x + z) : r \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

En resumen, el argumento anterior nos permite decir quién es el 0-ésimo grupo de homología de nuestra gráfica particular G.

Proposición 2.

$$H_0(G) \cong \mathbb{R}$$

6. Definición general de homología en gráficas e independencia de la orientación

Lo que usamos en la sección pasada será esencialmente la definición que usaremos: Si entendiste bien lo que hicimos en el ejemplo pasado esto no debería ser nada nuevo.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

Dada una gráfica dirigida G, definimos los *espacios de cadenas* de dimensión 0 y 1 (denotados como C_0 y C_1 respectivamente) como los espacios vectoriales libres sobre $\mathbb{R}$ generados por los vértices y las aristas de G.

Definimos el operador de frontera $\partial : C_1 \to C_0$ como la *extensión lineal* del operador frontera en aristas dado por

$$\partial(\text{arista}) = \text{punto final } - \text{ punto inicial.}$$

Definición 1. Con el contexto que dimos, definimos los *grupos de homología* de G con coeficientes reales [1] como

$$H_1(G) = \ker \partial \text{ y } H_0(G) = C_0/\operatorname{Im}\partial.$$

Ahora que ya viste cómo calcular los grupos de homología para una gráfica cualquiera con el ejemplo anterior, podemos ver resultados un poco más abstractos para aclarar algunas cosas y facilitar estos cálculos. Para comenzar, veamos que la homología no depende de la orientación.

Proposición 3. *Los grupos de homología de G* no dependen de la orientación que le demos a las aristas*. Es decir, si tenemos una gráfica no dirigida, Leo y Julio escogen dos orientaciones distintas los grupos de homología obtenidos son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que G y $\tilde{G}$ son dos gráficas iguales pero con orientación distinta en algunas aristas, digamos las aristas $a_1, \ldots, a_n$. ¿En que afecta, relativo a la homología, el cambiar la orientación de una arista? Si vemos nuestros cálculos, vemos que la orientación en realidad sólo interviene cuando calculamos el operador frontera. Entonces en G, $\partial a_i = y_i - x_i$ y en $\tilde{G}$ tenemos que $\partial a_i = x_i - y_i$.

Para calcular $H_1(G)$ nos fijamos en la matriz cuyas columnas son la imagen de las aristas. Comparando esta matriz con la de $\tilde{G}$, la única diferencia es que el signo de algunas columnas (las columnas que corresponden a $a_1, \ldots, a_n$), esto es, la matriz del operador ∂ en G y en $\tilde{G}$ sólo difieren por multiplicar por -1 algunas columnas (que es una operación elemental), por lo que el espacio nulo (o kernel) es el mismo.

Para calcular $H_0(G)$ necesitamos fijarnos en $\operatorname{Im}\partial$, pero observa que, por el mismo razonamiento, al realizar operaciones elementales, no cambiamos la imagen de ∂. Se sigue que H_0 es el mismo sin importar la orientación. $\square$

Observación 3. *Si bien nuestros grupos de homología no dependen de la orientación que le demos a las aristas, sí tenemos que escoger una orientación para poder calcularlos. Como podemos elegir cualquiera y no hace diferencia, podemos elegir alguna que nos facilite los cálculos.*

Ejercicio 6. *Convéncete de la demostración haciendo el cálculo de la matriz de A como hicimos en el ejemplo previo cambiando de orientación algunas aristas (por ejemplo, cambiando a e de sentido).*

La idea de la proposición anterior tiene sentido con nuestro marco de trabajo: cuando queremos calcular los hoyos de una gráfica, da igual si las flechas van en un sentido o en otro, los hoyos están ahí.

Ejercicio 7. *Calcula los grupos de homología del tetraedro T, cuya gráfica es la de la Figura 7.*

[1] En general, podemos usar cualquier campo F para los coeficientes. Pero aquí nos enfocaremos en el caso $F = \mathbb{R}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

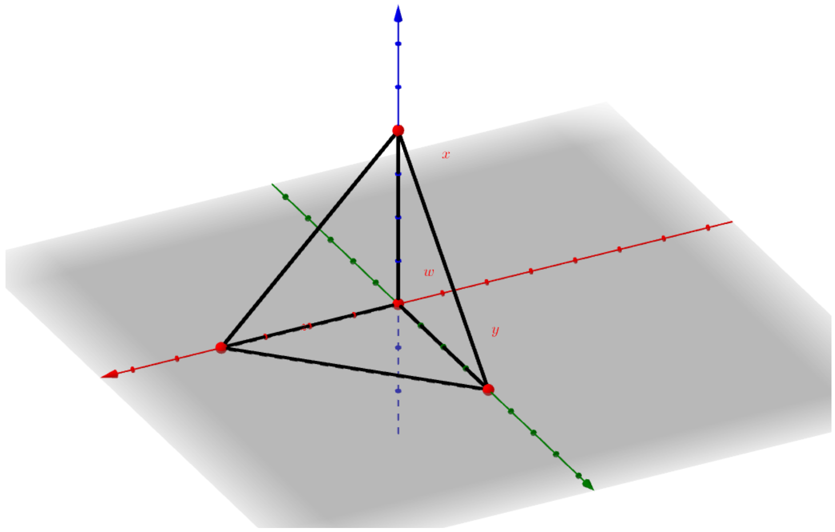

Figura 7: La gráfica tetraedro, T.

7. Propiedades de los grupos de homología

Ahora vamos a ver algunas propiedades más abstractas que van a facilitar mucho nuestro trabajo de calcular grupos de homología.

Decimos que una gráfica G es *conexa* si para cualesquiera dos vértices x, y en V existe una sucesión finita vértices distintos $(x, v_1, \ldots, v_n, y)$ tal que cada vértice es adyacente al que sigue (es decir, forman una arista). A esta sucesión de vértices se le conoce como una *trayectoria* de x a y.

Ejemplo 4. Todos los ejemplos de gráficas que hemos dado hasta ahora son gráficas conexas. La gráfica H en la Figura 8 también es conexa.

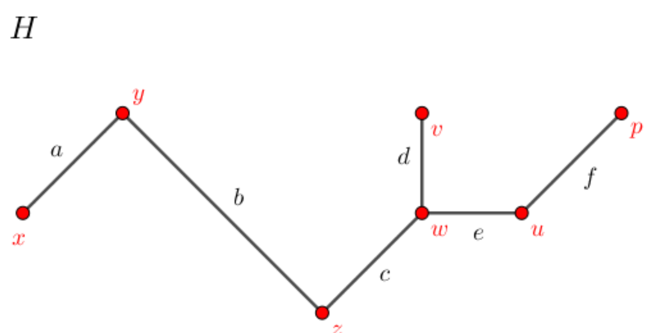

Figura 8: Una gráfica conexa.

En efecto, entre cualesquiera dos vértices hay una trayectoria. Por ejemplo entre x y v tenemos

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

la trayectoria dada por (x, y, z, w, v) y entre cada uno de estos hay una arista. Similarmente entre z y p tenemos la trayectoria (z, w, u, p).

Ejemplo 5. La gráfica J que damos en la Figura 9 no es conexa. Esto se debe, por ejemplo, a que no hay una trayectoria de z a v.

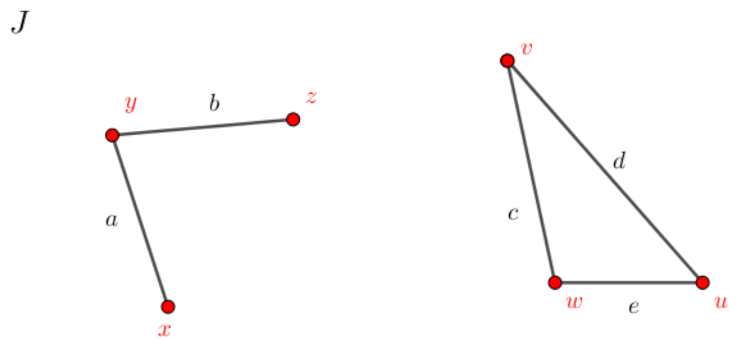

Figura 9: Una gráfica que no es conexa.

El concepto de conexidad de gráficas es importante, ya que nos permite calcular "de vistazo" al grupo H_0.

Teorema 1. *Si G es una gráfica conexa, entonces $H_0(G) \cong \mathbb{R}$.*

Demostración. Vamos a ver que en realidad en la clase de equivalencia de $C_0/\operatorname{Im}\partial$ sólo hay un vértice. Fijemos $x \in V$ y sea y cualquier otro vértice. Recuerda que la definición de espacio cociente nos dice que $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \operatorname{Im}\partial$. Como G es una gráfica conexa, tenemos que existe una trayectoria $(x, v_1, \ldots, v_n, y)$, y denotemos las aristas entre cada vértice por a_i. Es decir a_0 es la arista entre x y v_1, a_3 la arista entre v_3 y v_4, etc...

Podemos escribir

$$\begin{aligned} x - y &= x - v_0 + v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + \cdots + v_n - y \\ &= (x - v_0) + (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \cdots + (v_n - y) \\ &= \pm\partial a_0 \pm \partial a_1 \pm \cdots \pm \partial a_n \\ &= \partial\left(\pm a_0 \pm a_1 \pm \cdots \pm a_n\right) \in \operatorname{Im}\partial. \end{aligned}$$

En la cuarta expresión de la cadena de igualdades anterior, los signos $\pm$ se deben a que depende de la orientación que escojamos para cada arista. Esto quiere decir que en realidad sólo tenemos una clase de equivalencia en nuestro cociente: la del generado por x. Entonces cualquier elemento $\sum c_i v_i$ es de la forma $(\sum c_i)\, x \in \operatorname{span}(x)$. Observando que $\operatorname{span}(x) \cong \mathbb{R}$ se sigue el resultado. □

También hay un teorema bonito sobre los grupos H_1, pero para éste tenemos que definir una operación en nuestras gráficas.

Supongamos que tenemos dos gráficas G y H con dos conjuntos ajenos de vértices y aristas. Escogemos un vértice en G, digamos g, y un vértice en H, digamos h. Definimos la *suma de G y*

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

H en los vértices g y h, denotada como $G \vee_{(g,h)} H$, como la gráfica obtenida al "pegar" G y H por los vértices g y h en un solo vértice $g = h$. Un ejemplo te ayudará a aclarar a qué nos referimos.

Ejemplo 6. Si G, H son como en la Figura 10, podemos calcular la operación visualmente.

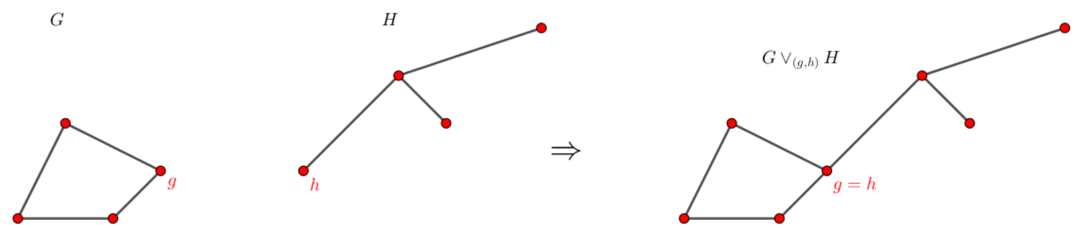

Figura 10: La suma de dos gráficas en sus vértices g y h

Como resultado estelar de este proyecto, proponemos el siguiente teorema, cuya demostración es un ejercicio guiado.

Teorema 2. *Si G, H son dos gráficas con vértices y aristas ajenas, $g \in G$, $h \in H$ son dos vértices, entonces*

$$H_1(G \vee_{(g,h)} H) \cong H_1(G) \oplus H_1(H).$$

Ejercicio 8. *Demuestra el teorema anterior. Puedes apoyarte de los siguientes pasos, pero recuerda que sólo son una guía. Tendrás que mostrar cada cosa enlistada en los pasos.*

1. *Encuentra una inclusión $\iota : C_1(G) \to C_1(G \vee H)$ y una inclusión $\iota' : C_1(H) \to C_1(G \vee H)$. Verifica que $C_1(G) + C_1(H) = C_1(G \vee H)$ (o sea, que generan).*

2. *Usando lo anterior, una cadena c de $C_1(G \vee H)$ se puede escribir como una suma $c_1 + c_2$ con c_1 una cadena en $C_1(G)$ y c_2 una cadena en $C_1(H)$. Usando esta igualdad $c = c_1 + c_2$ junto con el operador frontera, traduce la condición $\partial c = 0$ en términos de c_1 y c_2.*

3. *Apóyate de la condición anterior, y del hecho que el único vértice en común entre G y H es $g = h$, para concluir que $\partial c_1 = \partial c_2 = 0$. Esto implica que c_1 y c_2 están en $H_1(G)$ y $H_1(H)$ respectivamente, y por tanto estos últimos generan a $H_1(G \vee H)$ (explica por qué).*

4. *Justifica por qué $H_1(G) \cap H_1(H) = \{0\}$.*

5. *Combina 3 y 4 para llegar a la conclusión del teorema.*

Ejercicio 9. *Usa el teorema anterior (posiblemente varias veces) para calcular H_1 de la gráfica "dientes de cocodrilo".*

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

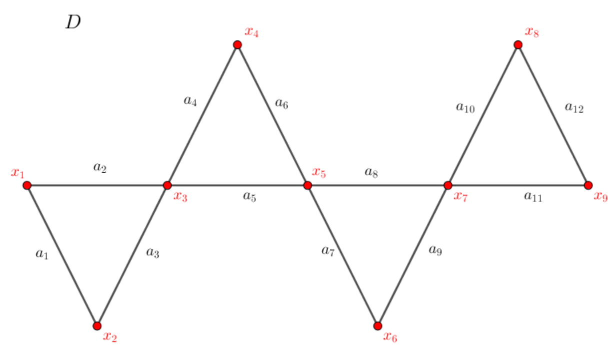

Figura 11: La gráfica de “dientes de cocodrilo”

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721