Álgebra Lineal I
Proyecto
El sorteo del auto y matrices de transición

1. Motivación

Una de las ramas de las matemáticas con un gran número de aplicaciones al mundo real es la probabilidad. El objetivo de este proyecto es presentar el concepto de matriz estocástica o matriz de transición. A través de estas matrices podemos entender fenómenos que cambian de manera aleatoria a través del tiempo.

Para entender esto de mejor manera, daremos una explicación breve de lo que es un **proceso estocástico discreto**. A grandes rasgos, un proceso estocástico discreto es un una secuencia de estados

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$$

en los cuales puede estar un objeto que cambian de manera aleatoria con el paso del tiempo. Pensamos a X_i como el estado del objeto al tiempo i.

El cambio de un estado a otro en una unidad de tiempo se describe mediante una probabilidad, y en general esta probabilidad depende de factores como el tiempo actual, algunos o todos los estados anteriores en los cuales el objeto ha estado (incluyendo el estado actual) y los estados en los cuales otros objetos están o han estado. Esto suena algo abstracto. Veamos algunos ejemplos concretos.

Por ejemplo, el objeto podría ser una molécula de agua y los estados podrían ser los tres estados físicos en los cuales ésta puede existir: líquido, solido y gaseoso. Otro ejemplo podría ser el estado de salud de una persona con respecto a una enfermedad: puede estar sano, contagioso, con síntomas leves, con síntomas graves, recuperado o fallecido. No todas las personas con síntomas leves pasarán a tener síntomas graves, ni todas pasarán a recuperarse. El siguiente estado que tenga una persona dada será aleatorio.

Con la discusión anterior en mente, consideremos el siguiente problema

Problema 1. Tres jugadores A, B, C están participando en un sorteo para ver quién se lleva un auto. Están sentados en una mesa circular, con el orden A, B, C en sentido horario. El jugador A comienza con una ficha.

Se va a tirar un dado repetidas veces. En cada lanzamiento:

- Si el número que cae es 1, entonces la ficha gira una posición en sentido antihorario.
- Si el número que cae es 2 ó 3, entonces la ficha gira una posición en sentido horario.
- Si el número que cae es 4, 5 ó 6, entonces la ficha se queda en su lugar.

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

El ganador del auto será quien tenga la ficha después del último lanzamiento. El anfitrión del concurso le da a elegir a A que el dado se tire 6, 7 u 8 veces. ¿Qué le conviene decir a A para tener la mejor probabilidad de quedarse con el auto?

En algunas ocasiones, como en el problema anterior, la probabilidad de que un objeto en un estado cambie a otro estado depende únicamente del estado actual $X_n = x_n$ en el que se está, y del estado siguiente $X_{n+1} = x_{n+1}$ al que se pasará. Esta probabilidad no depende de estados anteriores, o del momento del tiempo en el que se esté. Cuando esto sucede, decimos que nuestro proceso estocástico es un **proceso de Markov**, nombrado así en honor al matemático ruso Andréi Markov, quien introdujo el concepto en 1906.

Si además, el número de estados posibles es finito entonces decimos que nuestro proceso de Markov es una **cadena de Markov**. Las matrices estocásticas de las que hablaremos se usan para describir las probabilidades de transición entre los estados de una cadena de Markov. Veremos cómo usarlas para resolver el problema del auto.

2. Definiciones

Vamos a pensar a todos los vectores como vectores columna. Recuerda que para una matriz A en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con entradas $A = [a_{ij}]$, su transpuesta es la matriz ${}^tA$ en $M_{n,m}(\mathbb{R})$ con entradas ${}^tA = [a_{ji}]$. Si v es un vector columna, podemos pensarlo como una matriz y ${}^tv$ será el vector fila correspondiente.

Definición. Decimos que un vector v en $\mathbb{R}^n$ es *de probabilidad* si cada una de sus entradas es no negativa y la suma de sus n entradas es igual a 1.

Definición. Decimos que una matriz A en $M_n(\mathbb{R})$ es *de transición* o *estocástica* si cada una de sus n columnas es un vector de probabilidad. En otras palabras, para cada columna sus n entradas deben ser no negativas y tener suma igual a 1.

Definición. Decimos que una matriz A en $M_n(\mathbb{R})$ de transición es *regular* si existe un entero positivo m tal que A^m tiene únicamente entradas positivas.

3. Exploración de las definiciones

1. Sea u el vector de puros unos en $\mathbb{R}^n$. Tomemos A en $M_n(\mathbb{R})$ sin entradas negativas y v en $\mathbb{R}^n$ sin entradas negativas. Muestra que A es de transición si y sólo si ${}^tAu = u$. Muestra que v es de probabilidad si y sólo si ${}^tuv = (1)$.

2. Muestra que si A y B son matrices de transición en $M_n(\mathbb{R})$, entonces AB también es una matriz de transición. Concluye que A^n es una matriz de transición para todo entero positivo n.

3. Muestra que si A es una matriz de transición en $M_n(\mathbb{R})$ y v es un vector de probabilidad en $\mathbb{R}^n$, entonces Av es un vector de probabilidad.

4. Una matriz de transición regular puede tener ceros en sus entradas. Prueba que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra Lineal I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/0`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

es una matriz de transición regular.

5. Sean b, d, f, g, h reales positivos tales que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de transición. Prueba que es regular.

4. Solución del problema paso a paso

1. En el problema tenemos a tres jugadores, A, B y C. Sin embargo, los llamaremos 1, 2, 3 pues será conveniente para la notación más adelante. Si la ficha la tiene el jugador 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tirar el dado se la quede? ¿cuál es la probabilidad de que vaya al jugador 2? ¿Y al jugador 3?

2. Construye explícitamente la matriz M cuya entrada a_{ij} es la probabilidad de que si la ficha la tiene el jugador j, tras tirar el dado pase ahora al jugador i. Muestra que M es una matriz de transición.

3. Considera ahora el diagrama de árbol en la Figura 1, en el cual se registra qué puede pasar en dos tiradas de dado si la ficha la tiene inicialmente el jugador 1.

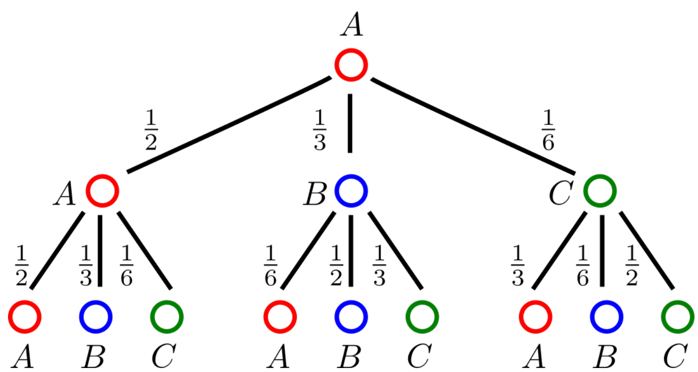

Figura 1: Árbol de probabilidad para pasar de A a otros estados en dos pasos

La probabilidad de que la ficha pase en dos lanzamientos del jugador A al C es igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}.$$

Esto se puede argumentar viendo que el primer sumando corresponde primero a quedarse en A y luego pasar a C; el segundo sumando corresponde primero a pasar a B y luego ir a C; y el tercer sumando corresponde a ir a C y quedarse ahí.

Haciendo un diagrama similar, ¿Cuál es la probabilidad de, comenzando en 3, llegar a 1 en dos pasos?

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

4. En el inciso anterior vimos que la probabilidad de pasar de 1 a 3 en dos pasos es igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}.$$

   Esta es exactamente la misma operación que se hace para encontrar la entrada en la columna 1 y fila 3 de M^2 (¡verifícalo!).

   Justifica por qué en general en la columna j y fila i de M^2 está la probabilidad de pasar del jugador j al jugador i en 2 pasos. Encuentra explícitamente todas las entradas de la matriz M^2.

5. Demuestra que en la columna j y fila i de M^n está la probabilidad de pasar del jugador j al jugador i en n pasos.

6. Encuentra de manera explícita las entradas de M^6, M^7 y M^8.

7. Para resolver el problema original, lo que le interesa al jugador A (en nuestra notación, el jugador 1) es maximizar la probabilidad de que la ficha regrese a sí mismo. Puede elegir si se hacen 6, 7 u 8 pasos. ¿En cuál caso la probabilidad de que la ficha regrese a él es la mayor?

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721